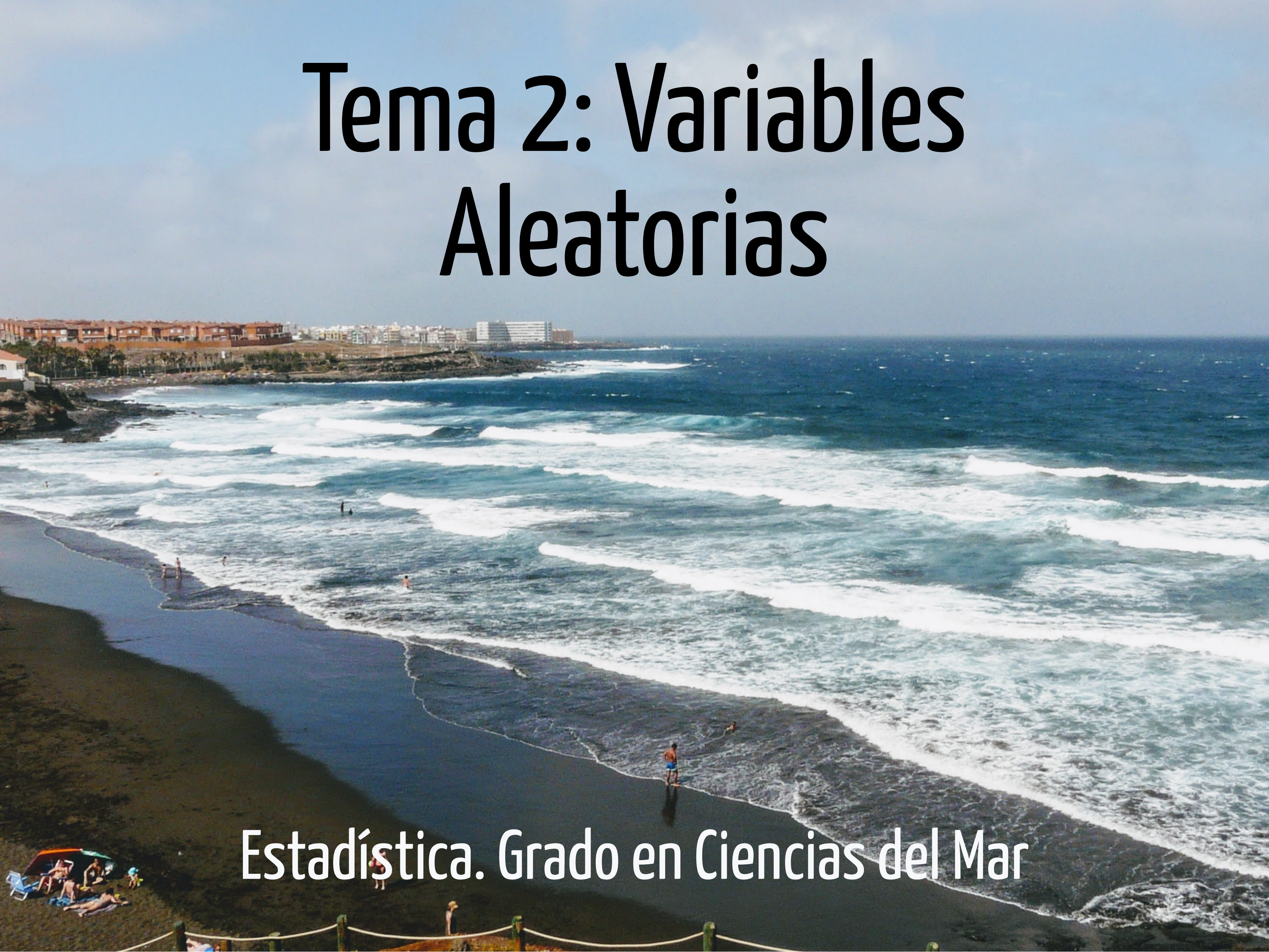
Tema 2: Variables Aleatorias



Estadística. Grado en Ciencias del Mar

1. Variables Aleatorias

Variables Aleatorias

Llamamos **variable aleatoria** a cualquier magnitud X cuyos valores son números reales que dependen del azar.

Ejemplos

- La **duración** de una borrasca
- El **número de mensajes** de WhatsApp que recibe una persona en un día arbitrario.
- El **número de nidos de tortuga** en una playa.
- La **suma de valores** obtenidos en dos tiradas sucesivas de un dado.
- El **peso total** de las capturas de atunes realizadas por un pesquero en un día arbitrario.

Variables Aleatorias

Formalmente, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una **variable aleatoria** X es cualquier función de la forma:

$$
\begin{array}{rccc}
X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & \omega \in \Omega & \hookrightarrow & X(\omega) = r \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

esto es, una función que a los elementos del azar les asigna números reales.

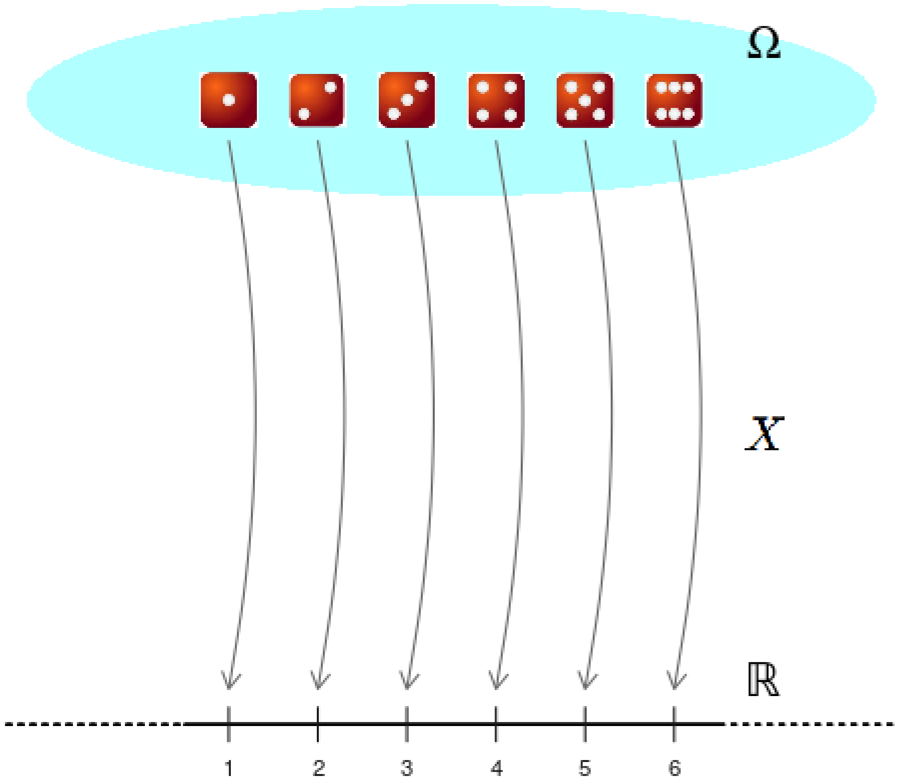
Ejemplo

Si observamos el resultado del lanzamiento de un dado tenemos que:

$\Omega = \{ \text{⚀}, \text{⚁}, \text{⚂}, \text{⚃}, \text{⚄}, \text{⚅} \}$

$$
\begin{array}{ccc}
X(\text{⚀}) = 1 & X(\text{⚁}) = 2 & X(\text{⚂}) = 3 \\
X(\text{⚃}) = 4 & X(\text{⚄}) = 5 & X(\text{⚅}) = 6
\end{array}
$$

O, de una manera más gráfica:



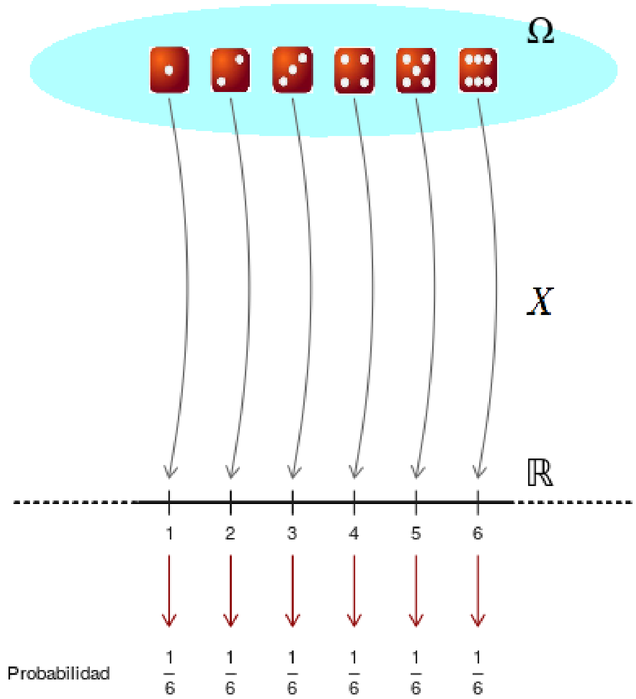
2. Función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

Función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria.

Cuando estudiamos una variable aleatoria, la primera cuestión de interés es **como se reparte (*como se distribuye*) la probabilidad** entre los distintos valores que puede tomar dicha variable. Como respuesta a esta cuestión se define la **función de distribución de probabilidad** de una variable aleatoria como:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \quad : \quad x \in \mathrm{R}$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado

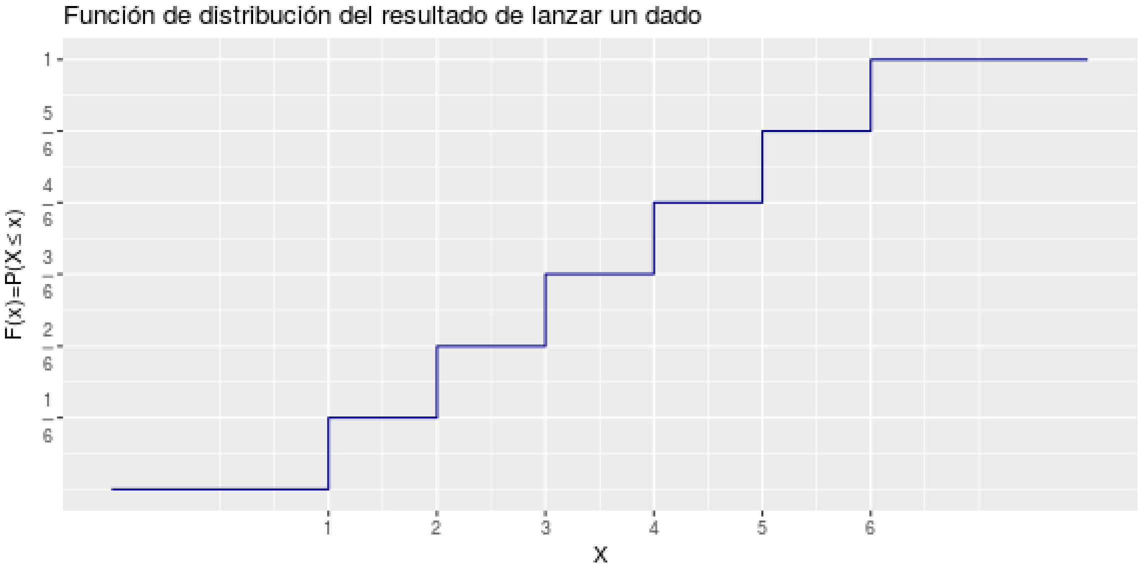


X="Puntuación obtenida al lanzar un dado"

$$F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{6} F(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{6} F(3) = P(X$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado

La función de distribución es **escalonada** no decreciente y la probabilidad se concentra en los puntos de salto.



$$P[X = a] = F(a) - F(a -)$$

Ejemplo: lugar donde se produce una avería en una carretera

Se considera un tramo recto y llano de carretera de 6 km de longitud en el que se ha instalado un sistema de control. Sea X el punto kilométrico de este tramo donde se registra la primera parada por avería de un coche desde que se instaló el sistema. Suponiendo que no hay ninguna razón para pensar que sea más probable que las averías se produzcan en un sitio u otro de la carretera, ¿Cuál sería la función de distribución de X?

Para determinar la forma de $F(x)$ podemos considerar que:

- El primer coche en averiarse en este tramo se parará entre el km 0 y el km 6; así pues, $X \in [0, 6]$ y por tanto:
  - $F(0) = P(X \leq 0) = 0$
  - $F(6) = P(X \leq 6) = 1$
- Como las averías son equiprobables en cualquier lugar de la carretera, podemos razonar que:
  - La probabilidad de que se produzca la avería antes del km 3 es la mitad: $P(X \leq 3) = \frac{1}{2}$
- La probabilidad de que se produzca la avería antes del km 2 (tercera parte del tramo) es $P(X \leq 2) = \frac{1}{3}$
- En general, la probabilidad de que se produzca antes del km k es: $P(X \leq k) = \frac{k}{6}$

Por tanto:

Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad $F(t)$

La función $F(t) = P[X \leq t]$ verifica las siguientes propiedades:

- $Lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$
- $Lim_{t \to \infty} F(t) = 1$
- $F(t)$ es una función **no decreciente**

Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

¿Cómo podemos calcular la probabilidad siguiente?

$$P[a < X \leq b]$$

Tengamos en cuenta que:

- $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$
- $\{X \leq a\} \cap \{a < X \leq b\} = \emptyset$

Por tanto:

$$P[X \leq b] = P[X \leq a] + P[a < X \leq b]$$

$$F(b) = F(a) + P[a < X \leq b]$$

$$P[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

3. Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias discretas.

Una variable aleatoria X se dice **discreta** cuando el conjunto de valores que puede tomar es finito o numerable.

Ejemplos:

- El resultado del lanzamiento de un dado
- La suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado
- El número de nidos de tortuga en una playa
- El número de borrascas que ocurren durante un tiempo t en una región oceánica.

Variables aleatorias discretas.

Llamamos **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X a la función:

$$p(t) = P(X = t) \ : \ \ t \in T$$

siendo T el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria X. La función de probabilidad cumple que:

$$\sum_{t \in T} P(X = t) = 1$$

Además:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \sum_{a < t \leq b} P(X = t)$$

Variables aleatorias continuas.

Una variable aleatoria X se dice **continua** si y solo si su función de distribución $F(t)$ es continua. Ello implica que X toma valores en un rango continuo.

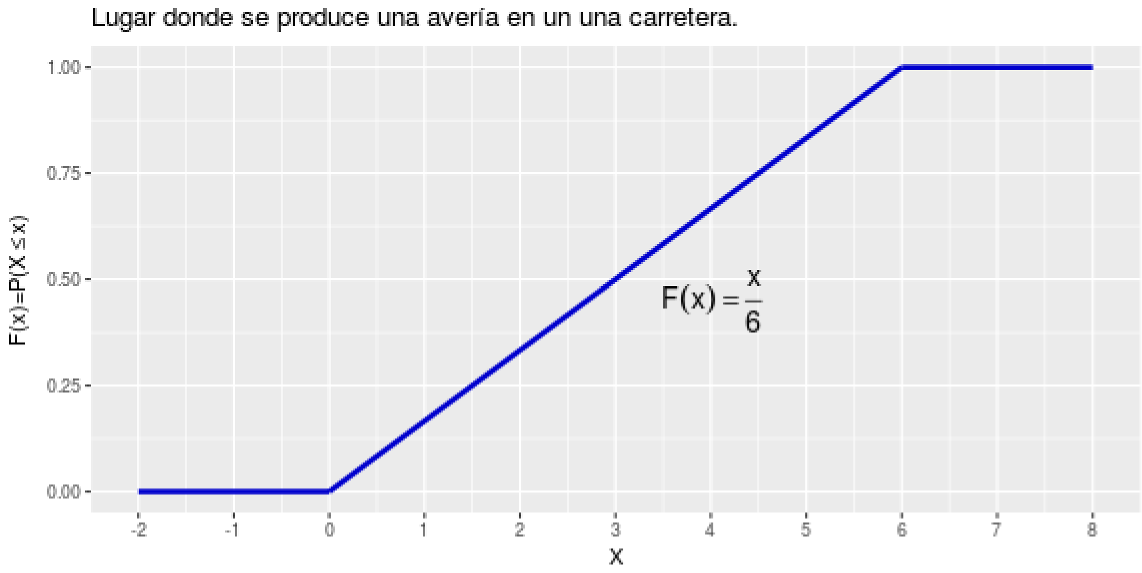
Ejemplos:

- La **duración** de una borrasca.
- La **distancia entre nidos de tortuga** en una playa.
- El **peso** total de las capturas de atunes realizada por un barco durante una jornada de pesca.
- El **lugar** en una carretera en que se produce la avería de un coche.

Distribuciones de probabilidad continuas

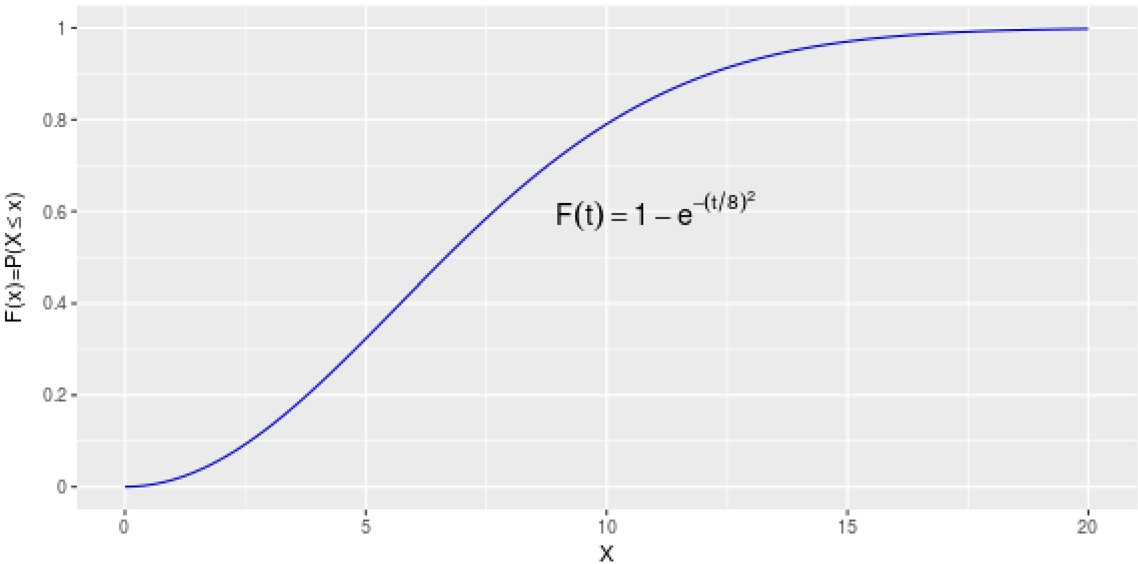
La función de distribución de una variable aleatoria continua es **no decreciente** (la función de probabilidad $F(x) = P(X \leq x)$ es acumulativa y por tanto no puede decrecer).

Ejemplo:



Distribuciones de probabilidad continuas

En muchas aplicaciones prácticas $F(x)$ es una función "suave":



En general para las distribuciones continuas:

$$P[X = a] = 0$$

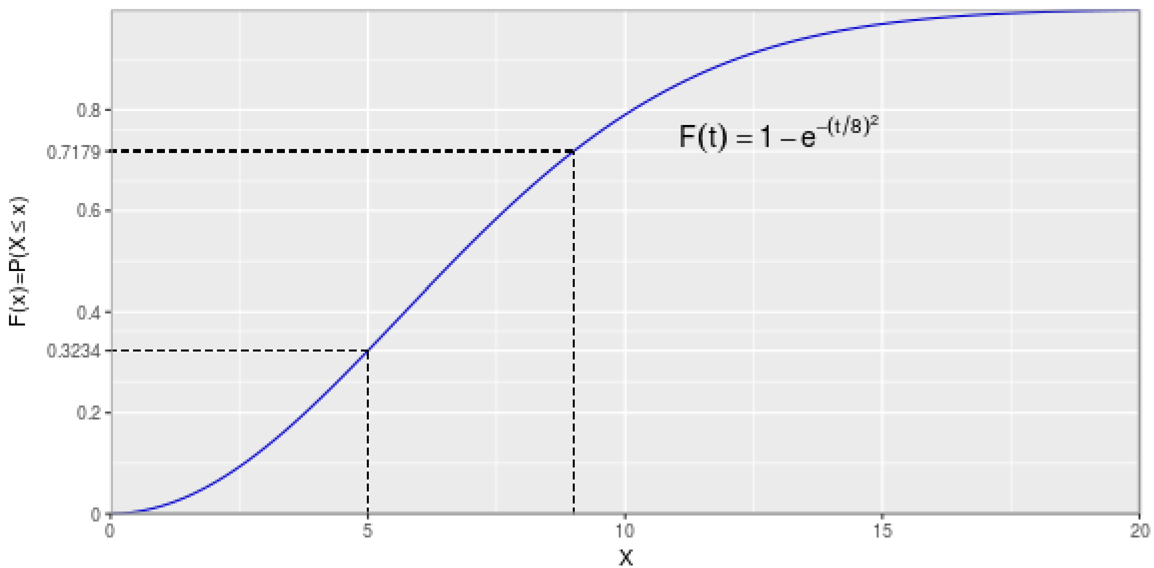
Distribuciones de probabilidad continuas

Recordemos que (tanto si la variable es discreta como si es continua):

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

En el ejemplo anterior:

$$P(5 < X \leq 9) = F(9) - F(5) = \left(1 - e^{-(9/8)^2}\right) - \left(1 - e^{-(5/8)^2}\right) = 0.7179 - 0.3234 = 0.3945$$



4. Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua.

Función de densidad de probabilidad

Recordemos nuevamente que:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Entonces, para un valor h cualquiera:

$$P(a < X \leq a + h) = F(a + h) - F(a)$$

Si dividimos por h obtenemos la *cantidad de probabilidad en un entorno de a de amplitud h*:

$$\frac{P(a < X \leq a + h)}{h} = \frac{F(a + h) - F(a)}{h}$$

y tomando límite cuando h tiende a 0, obtenemos la **densidad de probabilidad** en el punto a:

$$f(a) = lim_{h \to 0} \frac{P(a < X \leq a + h)}{h} = lim_{h \to 0} \frac{F(a + h) - F(a)}{h} = F^{'}(a)$$

Función de densidad de probabilidad

Por tanto:

$$F(t) = \Pr(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x) \cdot dx : \quad t \in \mathrm{R}$$

Obviamente, la función de densidad $f(x)$ habrá de ser una función **no negativa** que cumpla:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot dt = 1$$

ya que

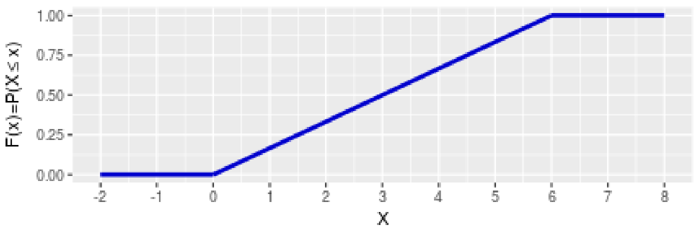
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot dt = P(-\infty \leq X \leq \infty) = 1$$

Ejemplo:

X="Lugar donde se para un coche por avería en una carretera de 6 km"

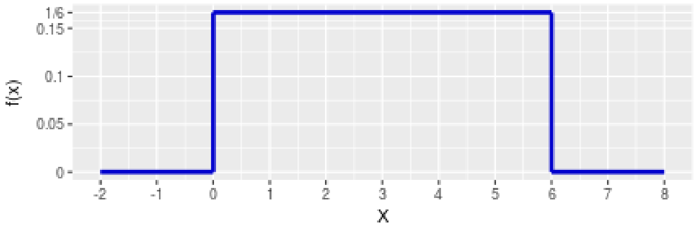
Función de distribución:

$$F(x) = \frac{x}{6}, \quad x \in [0, 6]$$



Función de densidad:

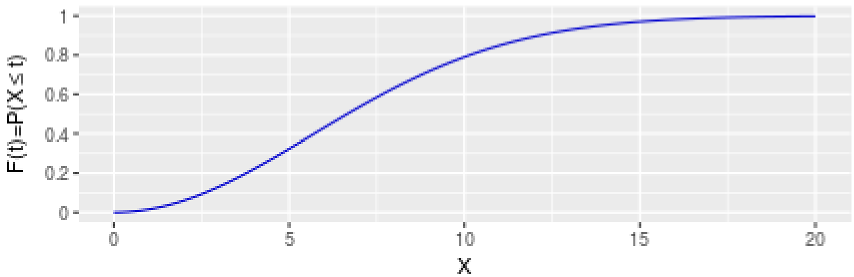
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in [0, 6] \\ 0 & x \notin [0, 6] \end{cases}$$



Ejemplo:

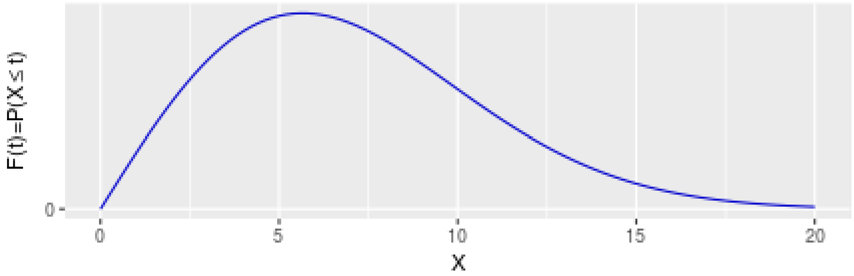
- Función de distribución:

$$F(t) = 1 - e^{-(t/8)^2}:\ \forall t \geq 0$$



- Función de densidad:

$$f(t) = \frac{t}{32} e^{-(t/8)^2}:\ \forall t \geq 0$$



Propiedades de la función de densidad de probabilidad

[1.] Sea X una variable aleatoria y sea $f(x)$ su función de densidad de probabilidad. Entonces:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Demostración:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) =$$

$$= \int_{-\infty}^b f(x) \cdot dx - \int_{-\infty}^a f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Propiedades de la función de densidad de probabilidad

[1.] Sea X una variable aleatoria y sea $f(x)$ su función de densidad de probabilidad. Entonces:

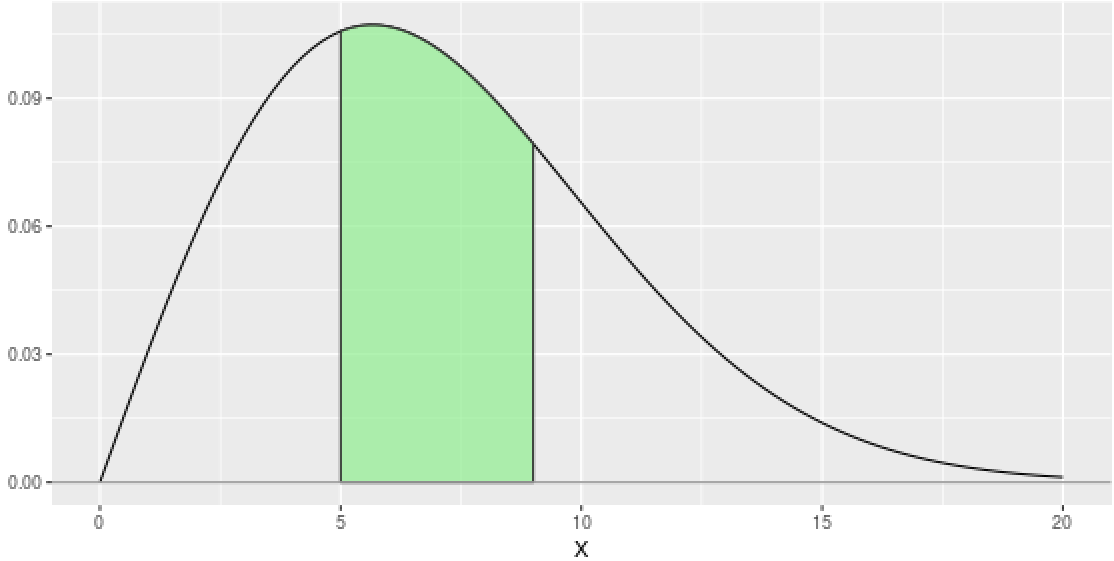
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Interpretación geométrica: la probabilidad de que la variable X tome valores entre a y b es el **área bajo la función de densidad** de X entre esos dos puntos.

Ejemplo

$$f(t) = \frac{t}{32} e^{-(t/8)^2}: \ \forall t \geq 0$$

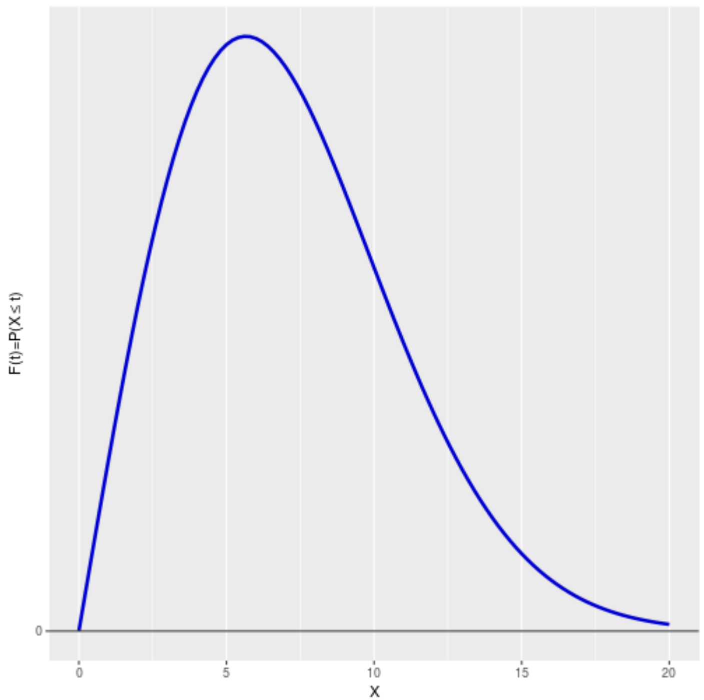
$$P(5 < X \leq 9) = \int_5^9 f(t) \cdot dt \approx 0.3945$$



5. Características de las distribuciones de probabilidad

Características de las distribuciones de probabilidad

En esta sección describiremos una serie de medidas que tienen como objetivo **resumir** las características principales de la distribución de una variable aleatoria:



- Valor central: esperanza.
- Dispersión: varianza y desviación típica.
- Posición: cuantiles.

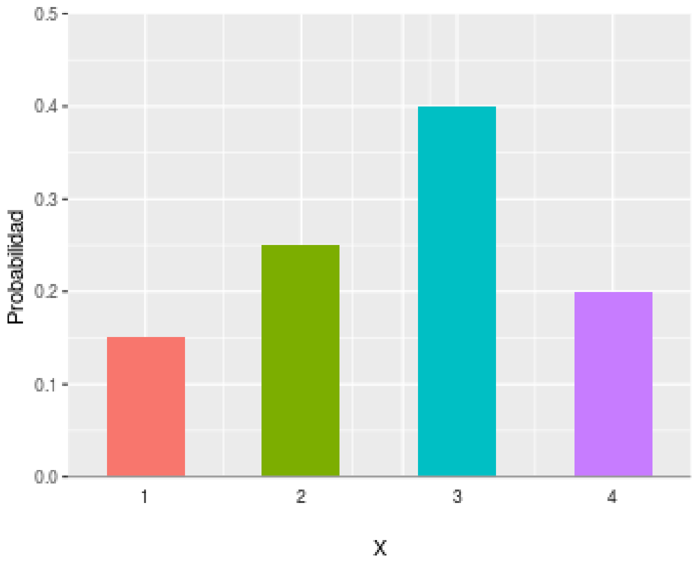
Valor central: Esperanza

Esperanza matemática

Objetivo: Resumir la variable aleatoria X en un valor **central** representativo de la totalidad de su distribución de probabilidad.

Ejemplo:

X	Probabilidad
1	0.15
2	0.25
3	0.40
4	0.20

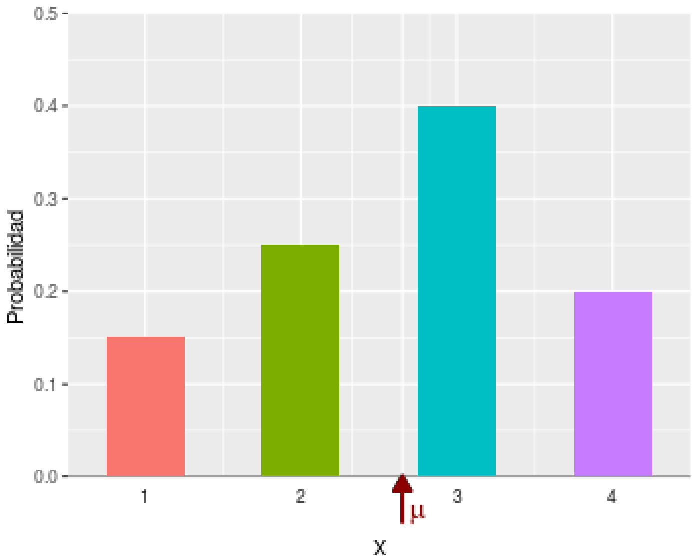


Esperanza matemática

Objetivo: Resumir la variable aleatoria X en un valor **central** representativo de la totalidad de su distribución de probabilidad.

Ejemplo:

X	Probabilidad
1	0.15
2	0.25
3	0.40
4	0.20



Usando la analogía entre probabilidad y masa, la **esperanza** $\mu = E[X]$ de una variable aleatoria se corresponde con el **centro de gravedad** de su distribución de probabilidad:

$$E[X] = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 = 2.65$$

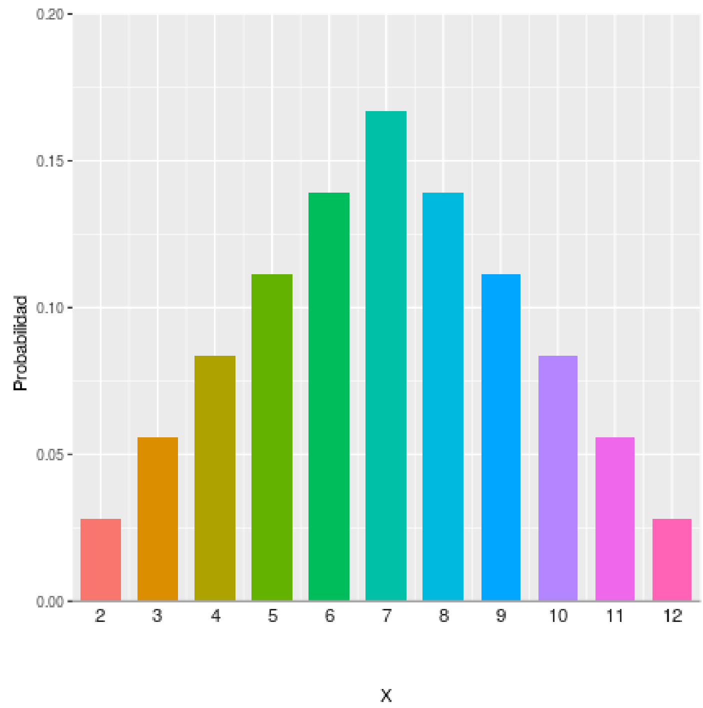
Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria **discreta**. Se define la esperanza de X como:

$$E[X] = \sum_t t \cdot \Pr(X = t)$$

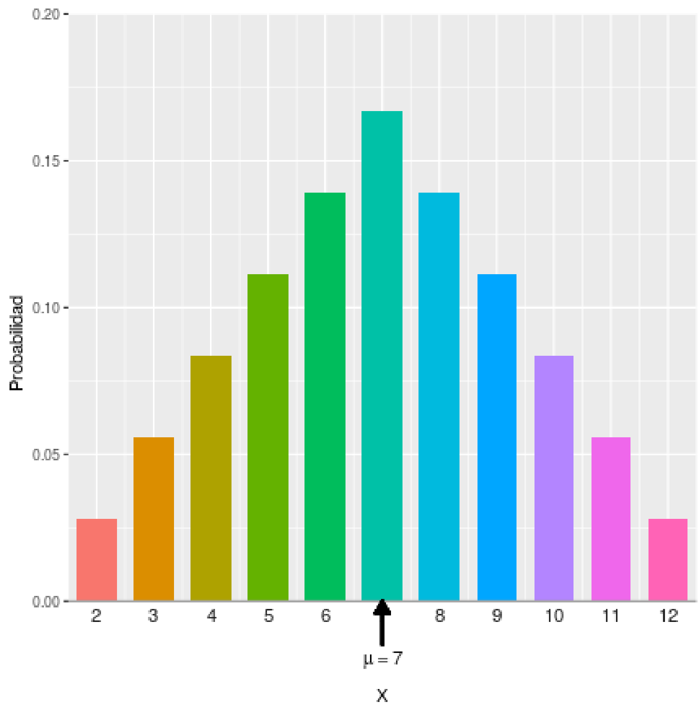
Ejemplo: suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado

X	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



Ejemplo: suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado

X	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} +$$

$$+7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

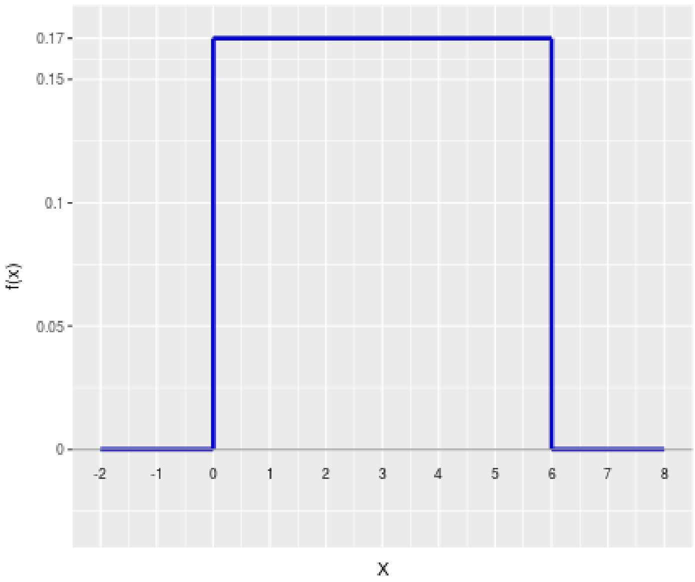
Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria **continua**. Se define la esperanza de X como:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt$$

Ejemplo

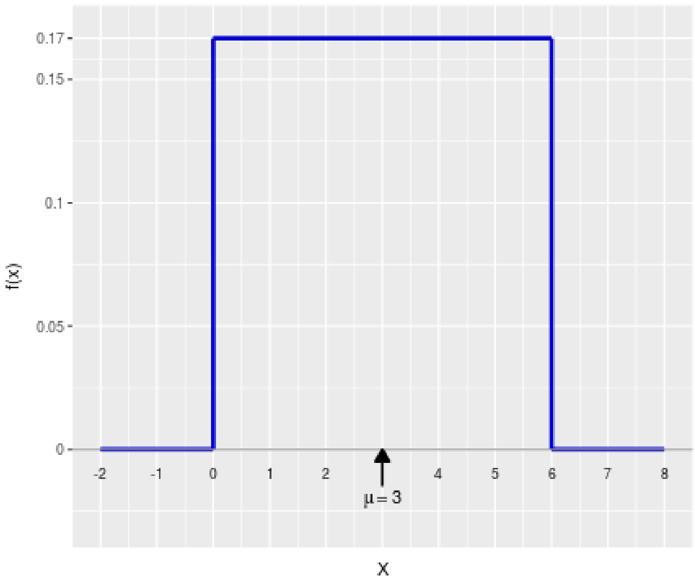
- El **lugar** en una carretera en que se produce la avería de un coche.



$$f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$$

Ejemplo

- El **lugar** en una carretera en que se produce la avería de un coche.



$$f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$E[X] = \int_0^6 t\frac{1}{6}dt = \frac{t^2}{2 \cdot 6}\Bigg]_0^6 = \frac{6^2}{2 \cdot 6} = 3$$

Ejemplo:

Una empresa de software ha desarrollado un programa para generar fondos de pantalla animados. Uno de los modelos de fondo consiste en la generación de círculos de radio y color aleatorios que se van moviendo al azar por la pantalla. El radio X de cada círculo es una variable aleatoria que toma valores entre 1 y 5 cm con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x(1-x)(x-5) & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Calcula la probabilidad de que el programa genere un círculo de radio mayor que 3 cm.

2. Calcula $E[X]$ (valor esperado del radio de un círculo generado al azar por el programa)

Ejemplo:

En primer lugar hemos de calcular el valor de λ de tal forma que la probabilidad total de que el radio de un círculo elegido al azar esté entre 1 y 5 cm. sea 1:

$$\int_1^5 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_1^5 \lambda x(1-x)(x-5)dx = 1 \Rightarrow \lambda \int_1^5 \left(-x^3 + 6x^2 - 5x\right)dx = 1$$

$$\Rightarrow \lambda \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_1^5 = 1 \Rightarrow \lambda \left[\frac{375}{12} - \left(-\frac{9}{12}\right)\right] = 1 \Rightarrow \lambda \cdot 32 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{32}$$

Ejemplo:

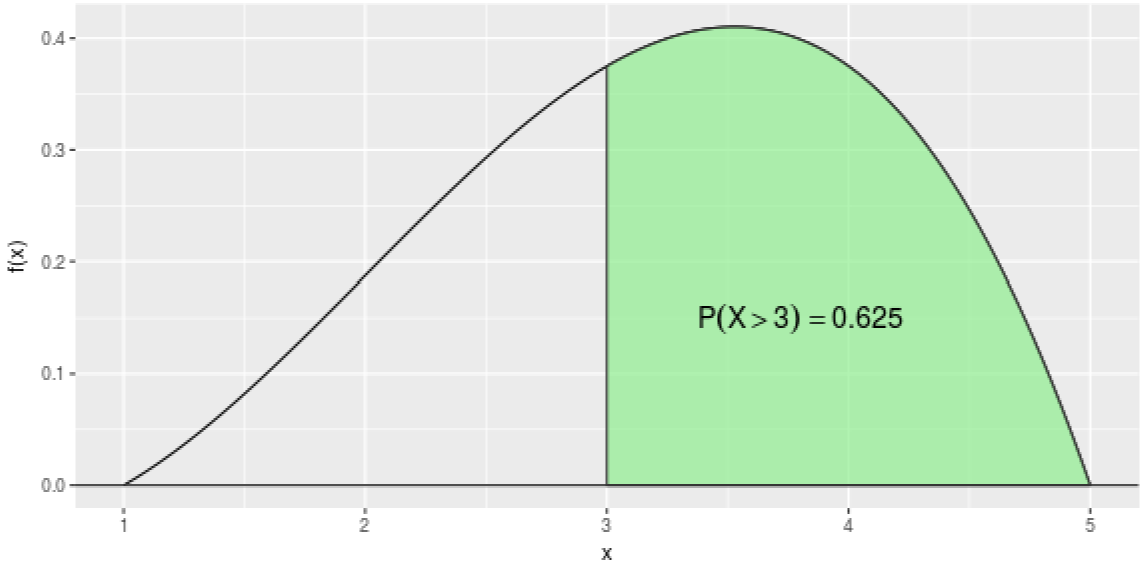
1. Calcula la probabilidad de que el programa genere un círculo de radio mayor que 3 cm.

$$P(X > 3) = P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{32} x(1-x)(x-5)dx =$$

$$= \frac{1}{32}\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_3^5 = \frac{1}{32}\left[\frac{375}{12} - \frac{135}{12}\right] = \frac{20}{32} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Ejemplo:

Gráficamente:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}x(1-x)(x-5) & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo:

2. Calcula $E[X]$ (valor esperado del radio de un círculo generado al azar por el programa)

Se tiene:

$$E[X] = \int_1^5 x f(x) dx = \int_1^5 \frac{1}{32} x^2 (1 - x)(x - 5) dx = \frac{1}{32} \int_1^5 \left(-x^4 + 6x^3 - 5x^2 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{32} \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{6x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} \right]_1^5 = \frac{49}{15} = 3.26667\ cm$$

Primera propiedad de linealidad de la esperanza

Sea λ una constante y X una variable aleatoria. Entonces

$$E[\lambda \cdot X] = \lambda \cdot E[X]$$

Demostración. (caso discreto)

$$E[\lambda X] = \sum_t \lambda t \cdot \Pr(X = t) = \lambda \sum_t t \cdot \Pr(X = t) = \lambda E[X]$$

Demostración. (caso continuo)

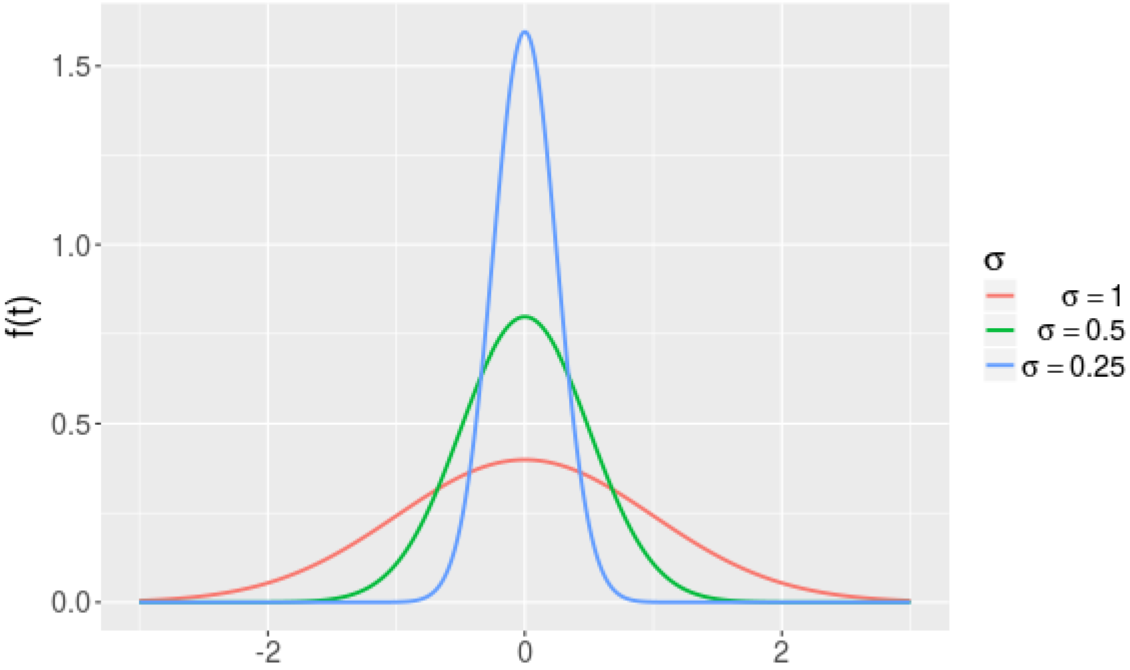
$$E[\lambda X] = \int_t \lambda t \cdot f(t) = \lambda \int_t t \cdot f(t) = \lambda E[X]$$

Dispersion: Varianza y Desviación típica

Dispersión de variables aleatorias (Varianza)

Para una variable aleatoria X con esperanza μ, la varianza σ^2 se define como:

$$\sigma^2 = \text{var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$



Dispersión de variables aleatorias (Varianza)

Para una variable aleatoria X con esperanza μ, la varianza σ^2 se define como:

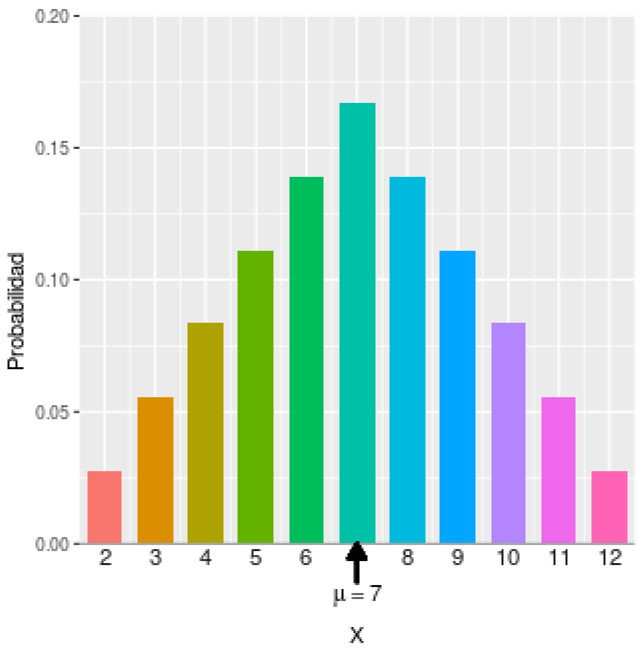
$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

Por tanto:

- Cuanto mayor sea la varianza **más dispersos** (alejados del centro de gravedad o esperanza) se encuentran los valores que puede tomar la variable aleatoria.
- Una menor varianza supone una **mayor concentración** de la distribución alrededor de su centro de gravedad.

Ejemplo: suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado

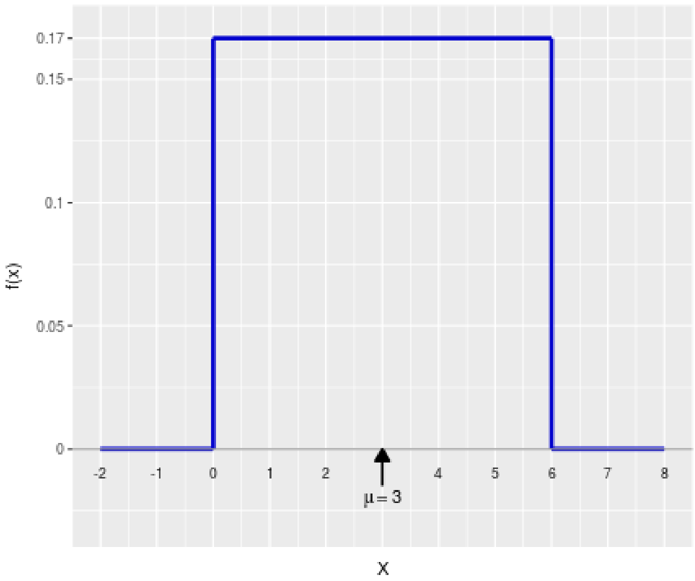
X	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \sum_{k=2}^{12} (x-\mu)^2 P(X=x) =$$

$$= (2-7)^2\frac{1}{36} + (3-7)^2\frac{2}{36} + (4-7)^2\frac{3}{36} + (5-7)^2\frac{4}{36} + (6-7)^2\frac{5}{36} + (7-7)^2\frac{6}{36} +$$

Ejemplo: Lugar de una carretera en que se produce la avería de un coche.



$$f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_0^6 (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_0^6 (x-3)^2 \frac{1}{6} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left[\frac{(6-3)^3}{3} - \frac{(0-3)^3}{3}\right] = \frac{1}{6}\left(3^2 + 3^2\right) = 3$$

Desviación Típica

La desviación típica se define como:

$$\sigma = \mathrm{sd}(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

Como medida de dispersión, σ tiene la ventaja de que se mide en la misma escala (mismas unidades de medida) que la variable X.

Interpretación de la Varianza: Desigualdad de Chebyshev

Pafnuty Chebyshev (1821-1894)

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Esta desigualdad indica que la probabilidad de que la variable X tome valores entre su esperanza μ y k veces su desviación típica σ es al menos $1 - 1/k^2$. En particular:

$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \geq 0.75$$

$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \geq 0.8889$$

$$P(|X - \mu| \leq 4\sigma) \geq 0.9375$$

Así, conocidas μ y σ esta desigualdad nos da una idea del rango en que se mueven los valores más probables de la variable aleatoria X.

Demostración de la desigualdad de Chebyshev

Propiedades de la Varianza

$$\mathrm{var}(\lambda X) = \lambda^2 \mathrm{var}(X)$$

Demostración: Llamando $\mu = E[X]$, por la propiedad de linealidad de la esperanza, se tiene que $E[\lambda X] = \lambda\mu$. Utilizando entonces la definición de varianza:

$$\mathrm{var}(\lambda X) = E\left[(\lambda X - E[\lambda X])^2\right] = E\left[(\lambda X - \lambda\mu)^2\right] =$$

$$= E\left[\lambda^2 (X - \mu)^2\right] = \lambda^2 E\left[(X - \mu)^2\right] =$$

$$= \lambda^2 \mathrm{var}(X)$$

Propiedades de la Varianza

$$\mathrm{var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Demostración:

$$\mathrm{var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

- En el caso discreto:

$$E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] = \sum_x \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) P(X = x) =$$

$$= \sum_x x^2 P(X = x) - 2\mu \sum_x x P(X = x) + \mu^2 \sum_x P(X = x) =$$

$$E\left[X^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

Propiedades de la Varianza

$$\mathrm{var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Demostración:

$$\mathrm{var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

- En el caso continuo:

$$E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] = \int_x \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) f(x)dx =$$

$$= \int_x x^2 f(x)dx - 2\mu \int_x x f(x)dx + \mu^2 \int_x f(x)dx$$

$$= E\left[X^2\right] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

Ejemplo:

Recordemos que en el problema del programa generador de círculos de radio aleatorio, el radio X de cada círculo es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}x(1-x)(x-5) & 1 \le x \le 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$E\left[X^2\right] = \int_1^5 x^2 f(x)dx = \int_1^5 \frac{1}{32}x^3(1-x)(x-5)dx = \frac{1}{32}\int_1^5\left(-x^5+6x^4-5x^3\right)dx$$

$$= \frac{1}{32}\left[-\frac{x^6}{6}+\frac{6x^5}{5}-\frac{5x^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{32}\left[5^4\left(-\frac{5^2}{6}+6-\frac{5}{4}\right)-\left(-\frac{1}{6}+\frac{6}{5}-\frac{5}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{32}\left[5^4\left(\frac{-250+360-75}{60}\right)-\left(\frac{-10+72-75}{60}\right)\right] = \frac{21888}{32\cdot 60} = \frac{684}{60} = \frac{57}{5} = 11.4$$

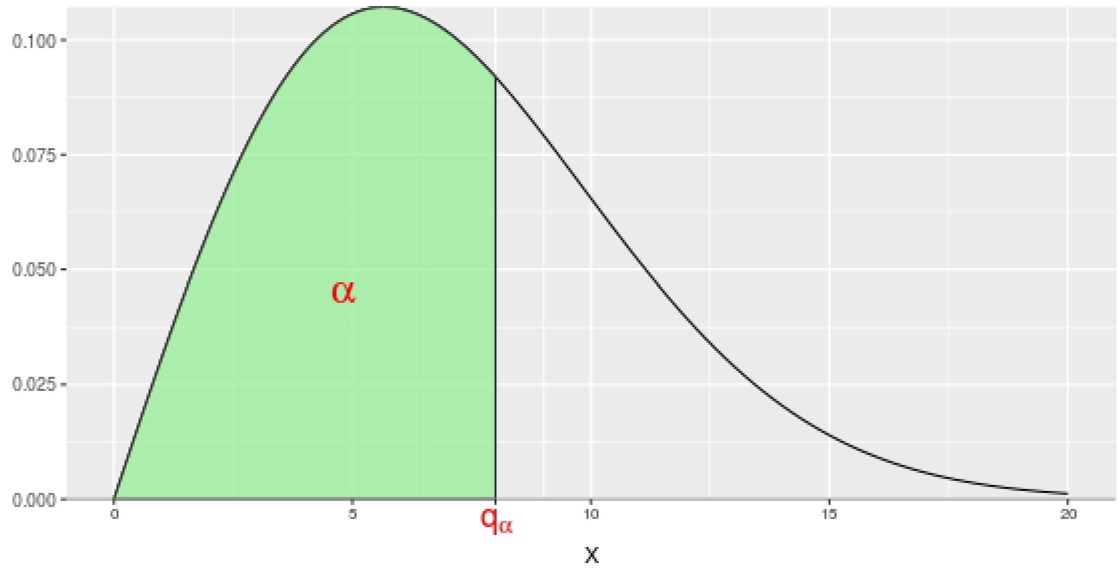
Posición: Cuantiles

Cuantiles

El α-ésimo cuantil de una variable aleatoria X es el valor q_α que verifica:

$$F(q_\alpha) = P(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

siempre y cuando esta ecuación tenga solución.



Cuantiles

Algunos cuantiles de uso muy extendido son los siguientes:

- $q_{0.5}$: se denomina **mediana** de la distribución de probabilidad.
- $q_{0.25}$: **Primer cuartil**
- $q_{0.75}$: **Tercer cuartil**
- $q_{0.01}, q_{0.02}, q_{0.03}, \ldots, q_{0.98}, q_{0.99}$ son los **percentiles** de la distribución