Contrastes de hipótesis más frecuentes

1. Contrastes con una muestra

1.1. Contrastes sobre la media de una distribución $N(\mu, \sigma)$.

H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\frac{(z_{1-\alpha/2}+z_{1-\beta})^2 s^2}{\Delta^2}$	$t_{exp} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\lvert t_{exp}\rvert > t_{n-1,\alpha/2} = \mathsf{qt}(1-\alpha/2, \mathsf{n}-1)$
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$\frac{(z_{1-\alpha}+z_{1-\beta})^2 s^2}{\Delta^2}$		$t_{exp} > t_{n-1,\alpha} = \mathsf{qt}(1-\alpha, \mathsf{n}-1)$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$			$t_{exp} < -t_{n-1,\alpha} = \mathsf{qt}(\alpha, \mathsf{n}-1)$

En R :

H_0	H_1	x=vector que contiene los datos. Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	`t.test(x,mu=mu0)`
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	`t.test(x,mu=mu0,alternative="greater")`
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	`t.test(x,mu=mu0,alternative="less")`

1.2. Contrastes sobre la varianza σ^2 de una distribución $N(\mu, \sigma)$.

H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$		$c_{exp} = \frac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$	$c_{exp} < \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} = \mathsf{qchisq}(\alpha/2, \mathsf{n}-1)$ ó $c_{exp} > \chi^2_{n-1,\alpha/2} = \mathsf{qchisq}(1-\alpha/2, \mathsf{n}-1)$
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$c_{exp} > \chi^2_{n-1,\alpha} = \mathsf{qchisq}(1-\alpha, \mathsf{n}-1)$
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$			$c_{exp} < \chi^2_{n-1,1-\alpha} = \mathsf{qchisq}(\alpha, \mathsf{n}-1)$

En R : antes de realizar el test, ejecutar `require(TeachingDemos)`

H_0	H_1	`x`=vector que contiene los datos. Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	`sigma.test(x,sigma=sigma0)`
$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	`sigma.test(sigma,sigma=sigma0,alternative="greater")`
$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	`sigma.test(sigma,sigma=sigma0,alternative="less")`

Nota: el paquete *TeachingDemos* no se instala por defecto con R , sino que debe descargarse e instalarse (*Paquetes*→*Instalar Paquetes* →*Madrid (Spain)*→*TeachingDemos*)

1.3. Contrastes sobre la proporción π de una distribución $B(n, \pi)$.

	H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
Contraste exacto	$\pi = \pi_0$	$\pi \neq \pi_0$		N_E="número de éxitos en n pruebas"	$N_E < q_{1-\alpha/2,n}(\pi_0) = \mathsf{qbinom}(\alpha/2, \mathsf{n}, \pi_0)$ ó $N_E > q_{\alpha/2,n}(\pi_0) = \mathsf{qbinom}(1-\alpha/2, \mathsf{n}, \pi_0)$
	$\pi \leq \pi_0$	$\pi > \pi_0$			$N_E > q_{\alpha,n}(\pi_0) = \mathsf{qbinom}(1-\alpha, \mathsf{n}, \pi_0)$
	$\pi \geq \pi_0$	$\pi < \pi_0$			$N_E < q_{1-\alpha,n}(\pi_0) = \mathsf{qbinom}(\alpha, \mathsf{n}, \pi_0)$
Contraste aproximado ($n \geq 30$) $N_E > 5$ $n - N_E > 5$	$\pi = \pi_0$	$\pi \neq \pi_0$	N_{BILAT}	$z_{exp} = \dfrac{p - \pi_0}{\sqrt{\frac{\pi_0(1-\pi_0)}{n}}}$	$\lvert z_{exp} \rvert > z_{\alpha/2} = \mathsf{qnorm}(1-\alpha/2)$
	$\pi \leq \pi_0$	$\pi > \pi_0$	N_{UNILAT}		$z_{exp} > z_\alpha = \mathsf{qnorm}(1-\alpha)$
	$\pi \geq \pi_0$	$\pi < \pi_0$			$z_{exp} < -z_\alpha = \mathsf{qnorm}(\alpha)$

donde

$$N_{BILAT} = \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{p_0 q_0} - z_\beta \sqrt{p_1 q_1}}{\Delta} \right)^2$$

$$N_{UNILAT} = \left(\frac{z_{\alpha}\sqrt{p_0 q_0} - z_{2\beta} \sqrt{p_1 q_1}}{\Delta} \right)^2$$

En el cálculo del tamaño de muestra, p_0 es un valor inicial para π_0 (obtenido por muestreo piloto o de la bibliografía), y:

$$p_1 = \begin{cases} p_0 + \Delta & \text{si } p_0 \leqslant \frac{1}{2} \\ p_0 - \Delta & \text{si } p_0 > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad q_0 = 1 - p_0, \quad q_1 = 1 - p_1$$

En R :

H_0	H_1	x=Número de éxitos, n=número de pruebas Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\pi = \pi_0$	$\pi \neq \pi_0$	`binom.test(x,n,p=p0)`
$\pi \leq \pi_0$	$\pi > \pi_0$	`binom.test(x,n,p=p0,alternative="greater")`
$\pi \geq \pi_0$	$\pi < \pi_0$	`binom.test(x,n,p=p0,alternative="less")`

2. Contrastes con dos muestras.

2.1. Diferencia de medias de variables con distribuciones $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$.

2.1.1. Muestras Independientes:

H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\frac{(z_{1-\alpha/2}+z_{1-\beta})^2\left(s_1^2+s_2^2\right)}{\Delta^2}$	$t_{exp} = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	$\lvert t_{exp}\rvert > t_{n,\alpha/2} = \mathsf{qt}(1-\alpha/2, \mathsf{n})$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\frac{(z_{1-\alpha}+z_{1-\beta})^2\left(s_1^2+s_2^2\right)}{\Delta^2}$		$t_{exp} > t_{n,\alpha} = \mathsf{qt}(1-\alpha, \mathsf{n})$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$			$t_{exp} < -t_{n,\alpha} = \mathsf{qt}(\alpha, \mathsf{n})$

siendo:

$$n = REDONDEO\left[\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 \frac{1}{n_1-1} + \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2 \frac{1}{n_2-1}}\right]$$

En R :

H_0	H_1	x1=vector que contiene los datos de la primera variable. x2=vector que contiene los datos de la segunda variable. Regla de decisión: Rechazar H_0 si p-valor$<\alpha$
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	`t.test(x1,x2)`
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	`t.test(x1,x2,alternative="greater")`
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	`t.test(x1,x2,alternative="less")`

NOTAS:

- En caso de que haya razones para pensar que las varianzas de ambas variables son iguales, añadir dentro del comando `t.test` la opción `var.equal=TRUE`.
- Si los datos se leen desde un archivo en el que se ha especificado una única variable `x` en dos muestras, definidas por los valores de la variable `grupo` (que puede tomar, por ejemplo, los valores 1 y 2), entonces puede utilizarse la sintaxis:

  `t.test(x ~ grupo)`

  especificando la alternativa si el test es unilateral.

2.1.2. Muestras Emparejadas:

H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	$\frac{(z_{1-\alpha/2}+z_{1-\beta})^2 s_D^2}{\Delta^2}$	$t_{exp} = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_D/\sqrt{n}}$	$\lvert t_{exp}\rvert > t_{n-1,\alpha/2} = \mathsf{qt}(1-\alpha/2, \mathsf{n}-1)$
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	$\frac{(z_{1-\alpha}+z_{1-\beta})^2 s_D^2}{\Delta^2}$		$t_{exp} > t_{n-1,\alpha} = \mathsf{qt}(1-\alpha, \mathsf{n}-1)$
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$			$t_{exp} < -t_{n-1,\alpha} = \mathsf{qt}(\alpha, \mathsf{n}-1)$

siendo:

$$S_D = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((X_{1i} - X_{2i}) - (\bar{X}_1 - \bar{X}_2)\right)^2}{n-1}} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_{12}} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2rS_1S_2}$$

En R :

H_0	H_1	*x1*=vector que contiene los datos de la primera variable. *x2*=vector que contiene los datos de la segunda variable. Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \neq \mu_2$	`t.test(x1,x2,paired=T)`
$\mu_1 \leq \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$	`t.test(x1,x2,paired=T,alternative="greater")`
$\mu_1 \geq \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	`t.test(x1,x2,paired=T,alternative="less")`

2.2. Diferencia de tendencia central entre distribuciones no normales.

Cuando las distribuciones de las variables X_1 y X_2 que se comparan no son normales (y las muestras son pequeñas), se puede utilizar el test de Wilcoxon-Mann-Whitney. Este test asigna *rangos* a los valores de ambas variables y contrasta si ambas tienen la misma tendencia central, o una de ellas tiende a dar valores más altos que la otra.

En R :

Test de Wilcoxon-Mann-Whitney		
H_0	H_1	*x1*=vector que contiene los datos de la primera variable. *x2*=vector que contiene los datos de la segunda variable. Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$	`wilcox.test(x1,x2,paired=F)`
$\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 > \mathcal{F}_2$	`wilcox.test(x1,x2,paired=F,alternative="greater")`
$\mathcal{F}_1 \geq \mathcal{F}_2$	$\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}_2$	`wilcox.test(x1,x2,paired=F,alternative="less")`

Notas:

- Si los datos son independientes, utilizar `paired=F`, y si están emparejados `paired=T`.
- Si los datos se leen desde un archivo en el que se ha especificado una única variable `x` en dos muestras, definidas por los valores de la variable `grupo` (que puede tomar, por ejemplo, los valores 1 y 2), entonces puede utilizarse la sintaxis:

  `wilcox.test(x ~ grupo)`

  especificando la alternativa si el test es unilateral y, en su caso, el posible emparejamiento.

2.3. Cociente de varianzas σ_1^2/σ_2^2 de variables con distribución normal (muestras independientes).

H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$1+4\left(\frac{t_{1-\alpha}+t_{1-2\beta}}{\ln\phi}\right)^2$	$F_{exp} = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F_{exp} < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha/2} = \mathsf{qf}(\alpha/2, \mathsf{n_1}-1, \mathsf{n_2}-1)$ ó $F_{exp} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha/2} = \mathsf{qf}(\alpha/2, \mathsf{n_1}-1, \mathsf{n_2}-1)$
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$1+4\left(\frac{t_{1-2\alpha}+t_{1-4\beta}}{\ln\phi}\right)^2$		$F_{exp} > F_{n_1-1,n_2-1,\alpha} = \mathsf{qf}(1-\alpha, \mathsf{n_1}-1, \mathsf{n_2}-1)$
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$			$F_{exp} < F_{n_1-1,n_2-1,1-\alpha} = \mathsf{qf}(\alpha, \mathsf{n_1}-1, \mathsf{n_2}-1)$

El tamaño de muestra es aproximado, siendo $\phi = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ el primer valor del cociente de varianzas para el que interesa que el contraste tenga una potencia $1-\beta$.

En R :

H_0	H_1	*x1*=vector que contiene los datos de la primera variable. *x2*=vector que contiene los datos de la segunda variable. Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	`var.test(x1,x2)`
$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$	`var.test(x1,x2,alternative="greater")`
$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	`var.test(x1,x2,alternative="less")`

Si los datos se leen desde un archivo en el que se ha especificado una única variable *x* en dos muestras, definidas por los valores de la variable *grupo* (que puede tomar, por ejemplo, los valores 1 y 2), entonces puede utilizarse la sintaxis:

```
var.test(x ~ grupo)
```

especificando la alternativa si el test es unilateral.

2.4. Diferencia de proporciones en muestras independientes.

Contraste aproximado si $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$, $n_1p^*, n_1q^*, n_2p^*, n_2q^* > 5$				
H_0	H_1	Tamaño de muestra	Estadístico de contraste	Región de rechazo de H_0
$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 \neq \pi_2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{z_{1-\alpha/2}+z_{1-\beta}\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta}\right)^2$	$z_{exp} = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{p^*q^*\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$	$\lvert z_{exp}\rvert > z_{\alpha/2} = \mathsf{qnorm}(1-\alpha/2)$
$\pi_1 \leq \pi_2$	$\pi_1 > \pi_2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{z_{1-\alpha}+z_{1-2\beta}\sqrt{1-\Delta^2}}{\Delta}\right)^2$		$z_{exp} > z_\alpha = \mathsf{qnorm}(1-\alpha)$
$\pi_1 \geq \pi_2$	$\pi_1 < \pi_2$			$z_{exp} < -z_\alpha = \mathsf{qnorm}(\alpha)$

NOTAS:

- p_1 y p_2 son las respectivas proporciones muestrales.
- $p^* = \frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$, $q^* = 1 - p^*$
- Δ es la diferencia mínima a detectar entre π_1 y π_2.

En R : si se dispone de tamaños muestrales grandes:

Contraste aproximado si $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$, $n_1p^*, n_1q^*, n_2p^*, n_2q^* > 5$		
H_0	H_1	`(x1,x2)`=Número de éxitos en cada una de las dos muestras. `(n1,n2)`=Tamaños de las muestras. Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 \neq \pi_2$	`prop.test(c(x1,x2),c(n1,n2))`
$\pi_1 \leq \pi_2$	$\pi_1 > \pi_2$	`prop.test(c(x1,x2),c(n1,n2),alternative="greater")`
$\pi_1 \geq \pi_2$	$\pi_1 < \pi_2$	`prop.test(c(x1,x2),c(n1,n2),alternative="less")`

En caso de que se disponga de una variable `result` con dos valores (éxito-fracaso), y otra variable `grupo` que especifica la muestra, puede emplearse la sintaxis:

```
prop.test(table(result,grupo),alternative="...")
```

especificando en cada caso la alternativa de interés (o no incluyendo el comando `alternative` si el test es bilateral).

En R : si los tamaños muestrales son pequeños:

Si no se dan las condiciones anteriores ($n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$, $n_1p^*, n_1q^*, n_2p^*, n_2q^* > 5$), puede emplearse el *test exacto de Fisher:*

Test Exacto de Fisher		
H_0	H_1	`x`=Variable con dos valores (éxito y fracaso). `grupo`=Variable que indica la muestra (1 ó 2). Regla de decisión: Rechazar H_0 si `p-valor`$<\alpha$
$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 \neq \pi_2$	`fisher.test(table(x,grupo))`
$\pi_1 \leq \pi_2$	$\pi_1 > \pi_2$	`fisher.test(table(x,grupo),alternative="greater")`
$\pi_1 \geq \pi_2$	$\pi_1 < \pi_2$	`fisher.test(table(x,grupo),alternative="less")`