Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 6: Procesos Estacionarios

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

Procesos estocásticos

Un **proceso estocástico** $\{X_t\}_{t \in T}$, donde $T \subset \mathbb{R}$, puede definirse de manera laxa como una *función aleatoria del tiempo* que modela un fenómeno que evoluciona a lo largo del tiempo de forma aleatoria.

Ejemplos que hemos visto en la asignatura:

- *Recorrido aleatorio* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: posición, después de n saltos de una partícula que se mueve al azar a izquierda y derecha.
- *Cadenas de Markov* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$: sucesiones de variables caracterizadas por la independencia entre pasado y futuro una vez que se conoce el presente.
- *Sistemas de colas* N_t: número de clientes en un sistema en un instante arbitrario t, cuando las llegadas y salidas se producen en instantes aleatorios.

Los procesos estocásticos pueden ocurrir en **tiempo discreto** (cadenas de Markov) o en **tiempo continuo** (Sistemas de colas)

Procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio

Procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio

Son procesos estocásticos que se caracterizan porque **algunas de sus propiedades se mantienen constantes a lo largo del tiempo**.

En concreto, un proceso estocástico, $\{X(t) \,:\, t \in T\}$, con espacio de tiempos $T \subset \mathbb{R}$ es **estacionario en sentido amplio** si:

1. Su valor medio se mantiene constante en el tiempo:

$$E[X(t)] = \mu \,, \forall t \in T$$

2. La covarianza entre observaciones del proceso depende solamente del tiempo τ que las separa y no del momento t en que se producen

$$\operatorname{cov}(X(t), X(t+\tau)) = R(\tau)$$

$R(\tau)$ se denomina **función de autocovarianza**

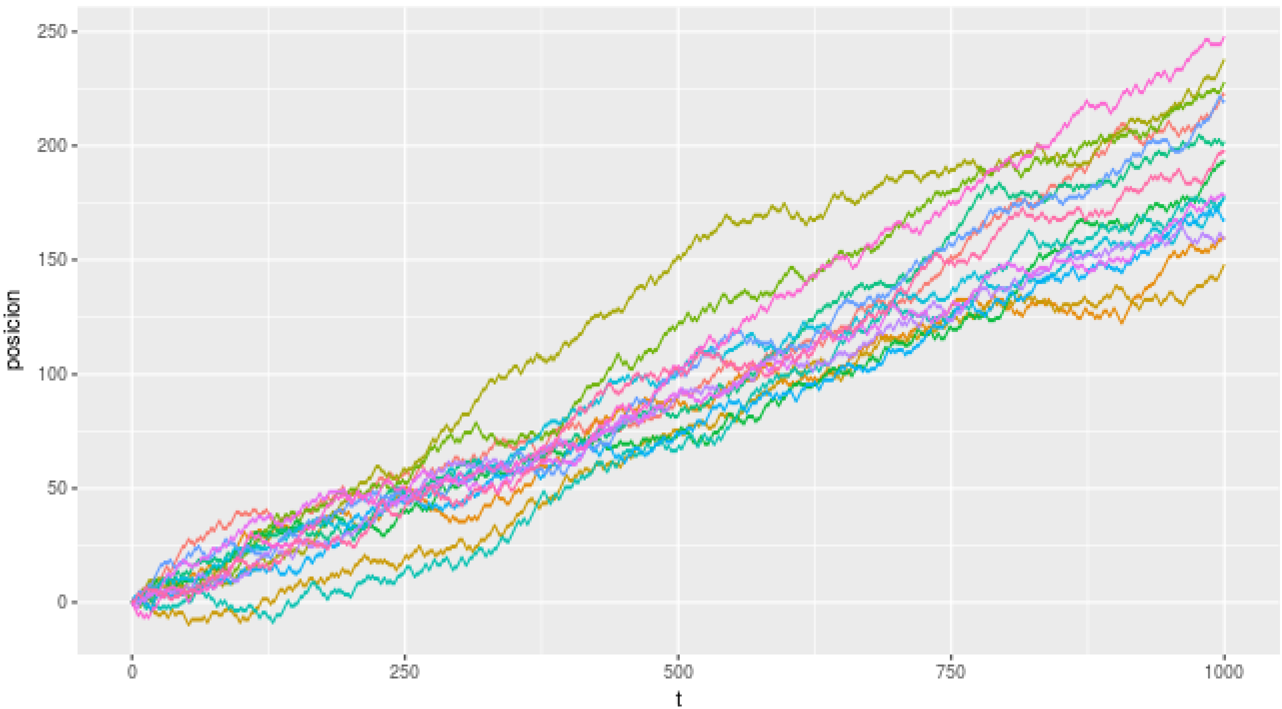
Procesos estocásticos estacionarios en sentido amplio

En particular, si elegimos $\tau = 0$, resulta:

$$\sigma_X^2 = \mathrm{var}\left(X\left(t\right)\right) = \mathrm{cov}\left(X\left(t\right), X\left(t\right)\right) = R\left(0\right)$$

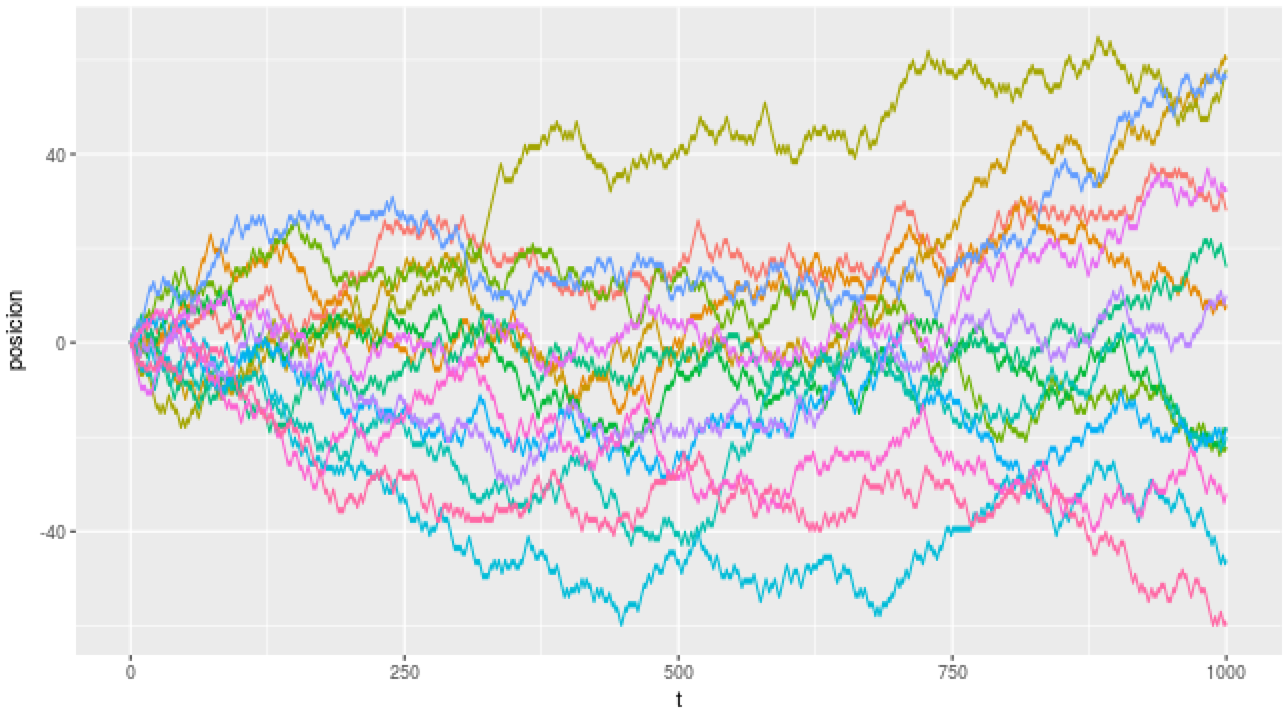
y por tanto, la varianza de un proceso estacionario en sentido amplio es también constante a lo largo del tiempo y su valor es igual a $R(0)$.

Ejemplos: Recorrido aleatorio con p=0.6 y q=0.4



- Claramente el valor esperado de este proceso no es constante en t.
- El recorrido aleatorio con p>q **no es un proceso estacionario**.

Ejemplo: Recorrido aleatorio con p=0.5 y q=0.5



- La varianza de este proceso aumenta con t.
- El recorrido aleatorio con p=q **tampoco es un proceso estacionario**.

Ejemplo: Proceso armónico

Un **Proceso Armónico** es un proceso estocástico de la forma:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot cos(\omega_k t + \varphi_k)$$

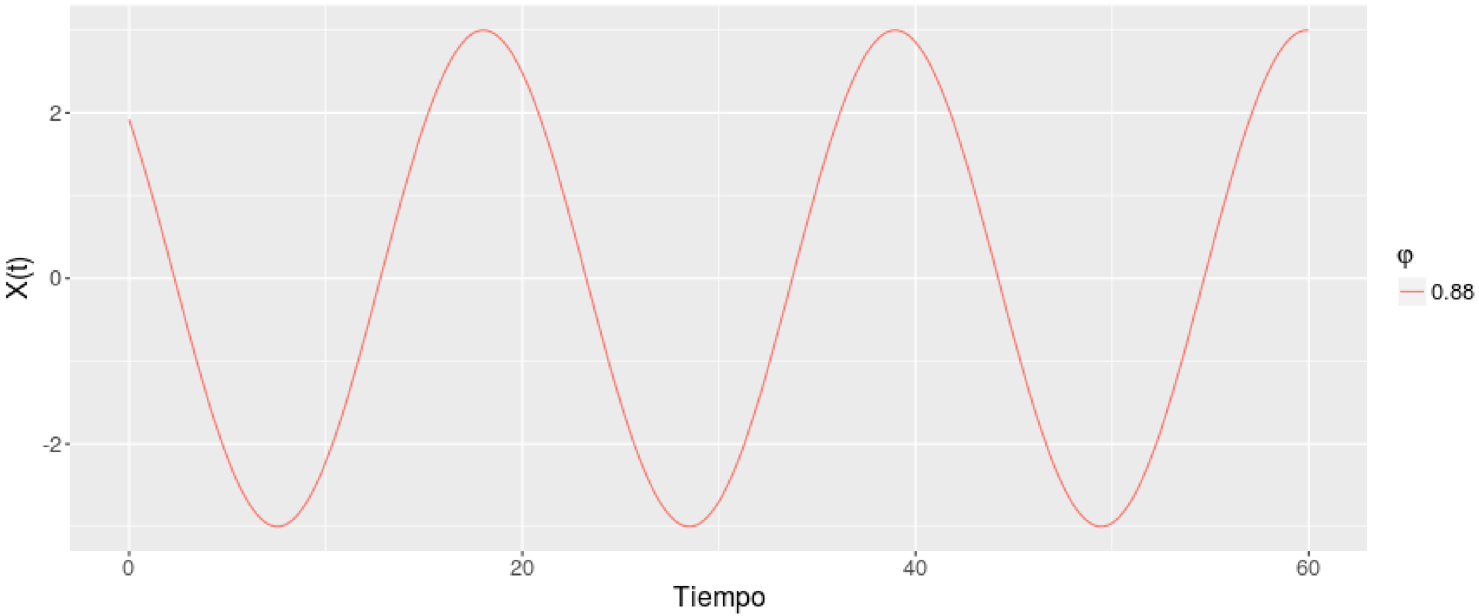
donde:

- Las amplitudes A_k son constantes.
- Las frecuencias ω_k son también constantes
- Las fases $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución Uniforme en $[0, 2\pi]$

Veremos en primer lugar las características de un proceso armónico simple (con $n = 1$, es decir, con una sóla componente armónica)

Ejemplo: Proceso armónico simple

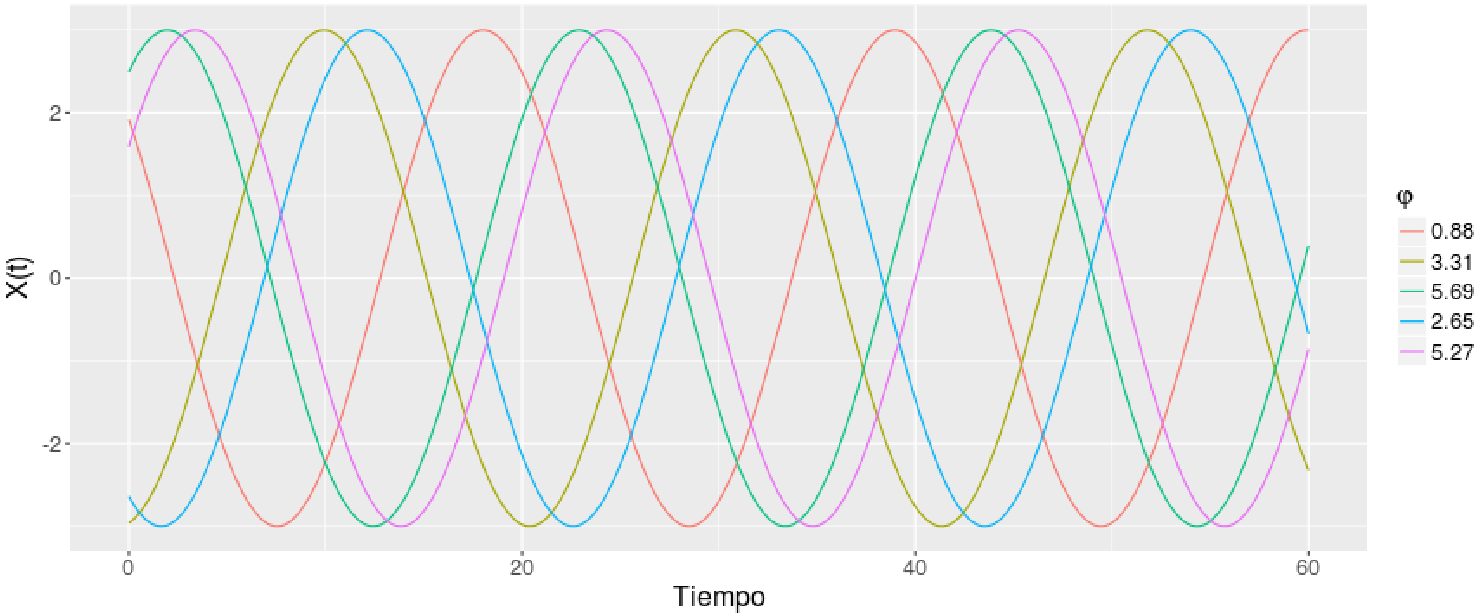
$$X(t) = 3 \cdot cos\left(0.3\,t + \varphi\right), \quad \varphi \approx U\left[0, 2\pi\right]$$



Una trayectoria del proceso

Ejemplo: Proceso armónico simple

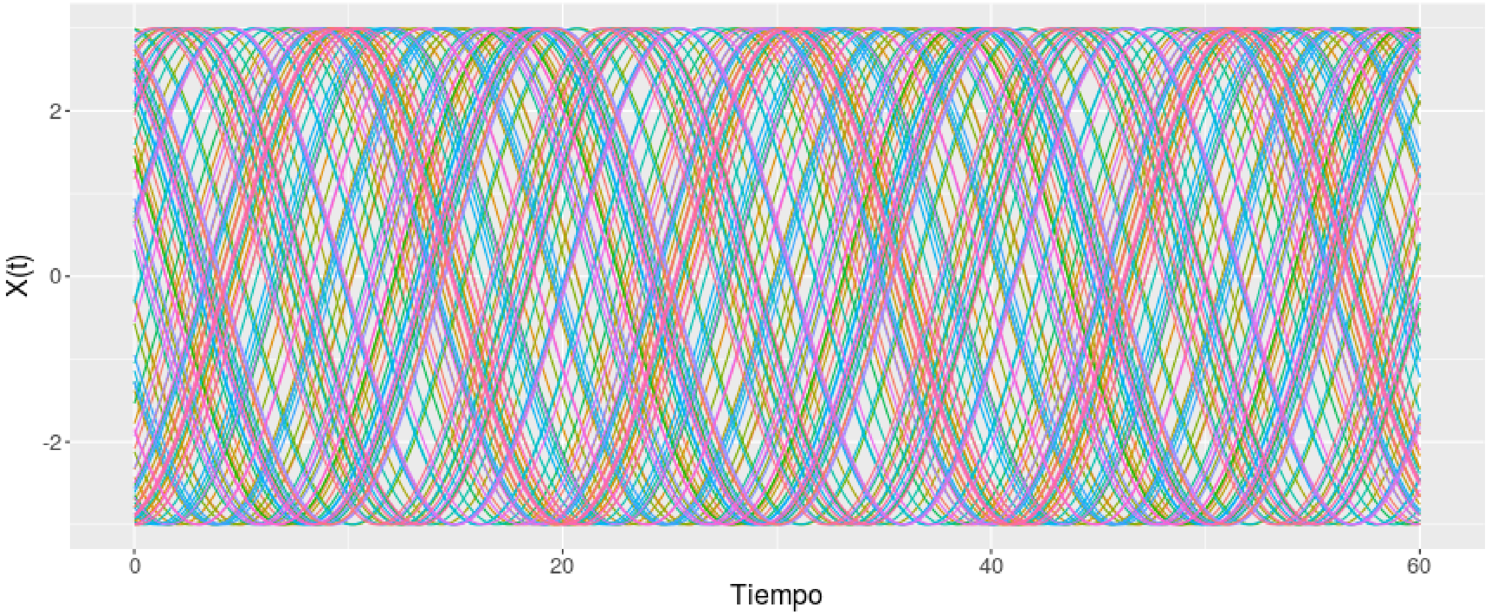
$$X(t) = 3 \cdot cos(0.3\,t + \varphi), \quad \varphi \approx U[0, 2\pi]$$



Cinco trayectorias del proceso

Ejemplo: Proceso armónico simple

$$X(t) = 3 \cdot cos\left(0.3\, t + \varphi\right), \quad \varphi \approx U\left[0, 2\pi\right]$$



Cien trayectorias del proceso

Ejemplo: Proceso armónico simple

$E\left[X\left(t\right)\right]=0\ \forall t:$ **El proceso armónico tiene esperanza 0 para todo t.**

- Si Y es una variable aleatoria continua definida en $\left[a,b\right]$ con función de densidad $f\left(y\right)$, sabemos que:

$$E\left[g\left(Y\right)\right]=\int_a^b g\left(y\right)f\left(y\right)dy$$

- En el caso del proceso armónico, la variable φ es uniforme en $\left[0,2\pi\right]$. Por tanto su función de densidad es $f\left(\varphi\right)=\frac{1}{2\pi}$ y entonces:

$$E\left[X(t)\right]=E\left[Acos\left(\omega t+\varphi\right)\right]=\int_0^{2\pi}Acos\left(\omega t+\varphi\right)\frac{1}{2\pi}d\varphi=\frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}cos\left(\omega t+\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\left[sen\left(\omega t+\varphi\right)\right]_0^{2\pi}=\frac{A}{2\pi}\left(sen\left(\omega t+2\pi\right)-sen\left(\omega t\right)\right)=0$$

Ejemplo: Proceso armónico simple

$Var\left[X\left(t\right)\right]=\frac{A^2}{2}\ \forall t$: **El proceso armónico tiene varianza constante.**

- Como $E\left[X\left(t\right)\right]=0\ \ \forall t$:

$$Var\left(X\left(t\right)\right)=E\left[\left(X\left(t\right)\right)^2\right]=E\left[A^2cos^2\left(\omega t+\varphi\right)\right]=\int_0^{2\pi}A^2cos^2\left(\omega t+\varphi\right)\frac{1}{2\pi}d\varphi$$

- Ahora bien:

$$\left.\begin{array}{rcl} cos^2x-sen^2x & = & cos2x \\ cos^2x+sen^2x & = & 1 \end{array}\right\}\Rightarrow cos^2x=\frac{1+cos2x}{2}\Rightarrow\int cos^2xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sen2x$$

- Por tanto:

$$Var\left(X\left(t\right)\right)=\frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}cos^2\left(\omega t+\varphi\right)d\varphi=\frac{A^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\omega t+\varphi\right)+\frac{1}{4}sen2\left(\omega t+\varphi\right)\right]_0^{2\pi}=$$

$$\frac{A^2}{2\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\omega t+2\pi\right)+\frac{1}{4}sen2\left(\omega t+2\pi\right)-\frac{1}{2}\omega t-\frac{1}{4}sen2\omega t\right]=\frac{A^2}{2}$$

Ejemplo: Proceso armónico simple

$Cov\left(X\left(t\right),X\left(t+\tau\right)\right)=\frac{A^2}{2}cos\omega\tau\ \forall t:$ **la covarianza entre dos observaciones depende sólo del tiempo que las separa**

- En efecto, como $cos\left(\omega\left(t+\tau\right)+\varphi\right)=cos\left(\omega t+\varphi\right)cos\omega t-sen\left(\omega t+\varphi\right)sen\omega t$, resulta:

$$Cov\left(X\left(t\right),X\left(t+\tau\right)\right)=E\left[X\left(t\right)\cdot X\left(t+\tau\right)\right]=E\left[A^2cos\left(\omega t+\varphi\right)cos\left(\omega\left(t+\tau\right)+\varphi\right)\right]=$$

$$A^2E\left[cos^2\left(\omega t+\varphi\right)cos\omega\tau+cos\left(\omega t+\varphi\right)sen\left(\omega t+\varphi\right)sen\omega\tau\right]=$$

$$A^2cos\omega\tau\cdot E\left[cos^2\left(\omega t+\varphi\right)\right]+A^2sen\omega\tau\cdot E\left[cos\left(\omega t+\varphi\right)sen\left(\omega t+\varphi\right)\right]=\frac{A^2}{2}cos\omega\tau$$

pues

$$E\left[cos\left(\omega t+\varphi\right)sen\left(\omega t+\varphi\right)\right]=\int_0^{2\pi}cos\left(\omega t+\varphi\right)sen\left(\omega t+\varphi\right)\frac{1}{2\pi}d\varphi=$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[sen^2\left(\omega t+\varphi\right)\right]_0^{2\pi}=0$$

Ejemplo: Proceso armónico simple

Así pues el proceso armónico simple $X(t) = Acos\left(\omega t + \varphi\right)$ verifica:

1. $E\left[X\left(t\right)\right] = 0 \ \forall t.$

(la esperanza es constante)

2. $Cov\left(X\left(t\right), X\left(t+\tau\right)\right) = \frac{A^2}{2} cos\omega\tau \ \ \forall t$

(la covarianza entre dos observaciones depende sólo del tiempo que las separa)

Por tanto **el proceso armónico simple es un proceso estacionario en sentido amplio**.

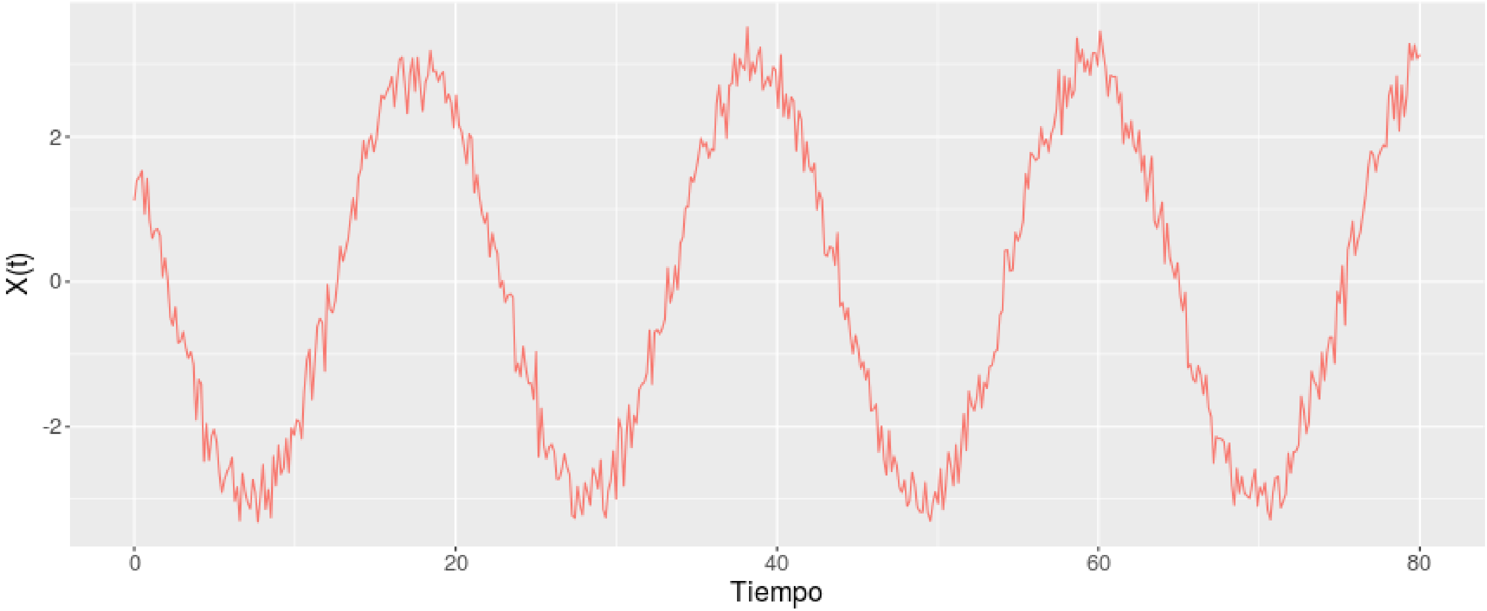
Nótese que además verifica que su varianza es constante:

$$Var\left[X\left(t\right)\right] = \frac{A^2}{2} \ \forall t$$

Ejemplo: Proceso armónico con ruido

$$X\,(t) = 3 \cdot cos\,(0.3\,t + \varphi) + e(t), \qquad \varphi \approx U\,[0, 2\pi]$$

$$e(t) \approx \text{iid}\,N(0, 0.25)\ \forall t$$



Una trayectoria del proceso

Procesos estacionarios: función de autocovarianza

$$R\left(\tau\right) = \operatorname{cov}\left(X\left(t\right), X\left(t+\tau\right)\right)$$

Propiedades:

1. $R\left(0\right) = \operatorname{var}\left(X\left(t\right)\right) = \sigma_X^2$

2. $\left|R\left(\tau\right)\right| \leqslant R\left(0\right) \forall\tau$

En efecto, el coeficiente de correlación entre $X(t)$ y $X(t+\tau)$ es:

$$r\left(\tau\right) = \frac{Cov\left(X\left(t\right), X\left(t+\tau\right)\right)}{\sqrt{Var\left(X(t)\right)}\sqrt{Var\left(X(t+\tau)\right)}} = \frac{Cov\left(X\left(t\right), X\left(t+\tau\right)\right)}{\sqrt{R\left(0\right)}\sqrt{R\left(0\right)}} = \frac{Cov\left(X\left(t\right), X\left(t+\tau\right)\right)}{R\left(0\right)}$$

y como $|r(\tau)| \leq 1$, se sigue que $R(\tau) = |Cov(X(t), X(t+\tau))| \leq R(0)$

3. $R\left(-\tau\right) = R\left(\tau\right),\ \forall\tau$

Procesos estacionarios especiales

- Proceso de ruido blanco
- Procesos Autoregresivos (AR)
- Procesos de Media Móvil (MA, *Moving Average*)
- Procesos armónicos

En lo que sigue consideraremos procesos estacionarios en los que $T = \mathbb{Z}$ (procesos en tiempo discreto).

Tales procesos en la práctica sirven para modelar **señales digitalizadas**.

Proceso de Ruido Blanco

Proceso de ruido blanco

Un **Proceso de ruido blanco** (Proceso puramente aleatorio) es un proceso estacionario en tiempo discreto $\{e(t) \,:\, t \in \mathbb{Z}\}$ que verifica:

1. $$E[e(t)] = 0 \; \forall t$$

2. $$R(\tau) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

- Por tanto, un ruido blanco **es una sucesión de variables incorreladas con varianza constante**.
- En el caso particular de que $e(t) \approx N(0, \sigma_\varepsilon) \; \forall t \in \mathbb{Z}$, el ruido blanco se dice **gaussiano**.

Proceso de ruido blanco

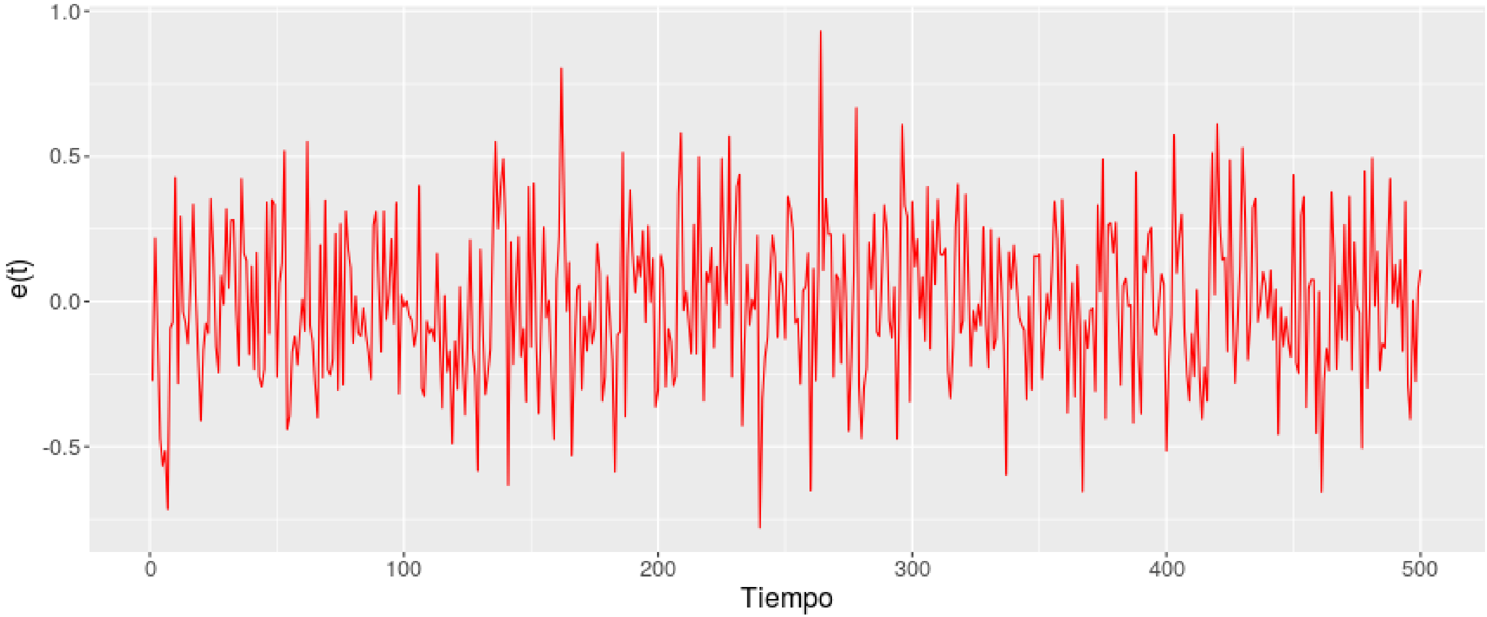
- El ruido es una señal inherente a cualquier transmisión de telecomunicación.
- En la práctica, el ruido tiene múltiples causas independientes entre sí, que suman sus efectos para producir el ruido que finalmente observamos. Por ello si $e(t)$ es una realización del proceso de ruido, podemos considerar que:

$$e(t) = Y_1(t) + Y_2(t) + \cdots + Y_k(t) + \ldots$$

- Por tanto, por efecto del Teorema del límite central, podemos esperar que para cada t la variable $e(t)$ siga una distribución normal. En circunstancias normales cabe esperar también que $E[e(t)] = 0$, que la variabilidad sea constante, $Var(e(t)) = \sigma_e^2$, y que en distintos instantes de tiempo los ruidos se comporten de forma independiente, esto es $Cov[e(t), e(t+\tau)] = 0$
- De ahí que, en la práctica, en el análisis de las señales que se consideran en Telecomunicación, se asume habitualmente que el ruido es gaussiano.

Ejemplo: ruido blanco gaussiano

$$e(t) \approx \text{iid} \;\; N(0,1) \;\; \forall t \in \mathbb{Z}$$



Procesos autoregresivos de primer orden, AR(1)

Proceso Autoregresivo de primer orden

Un proceso estacionario en tiempo discreto $\{X(t) : t \in \mathbb{Z}\}$ es **autorregresivo de orden 1 (AR(1))** si:

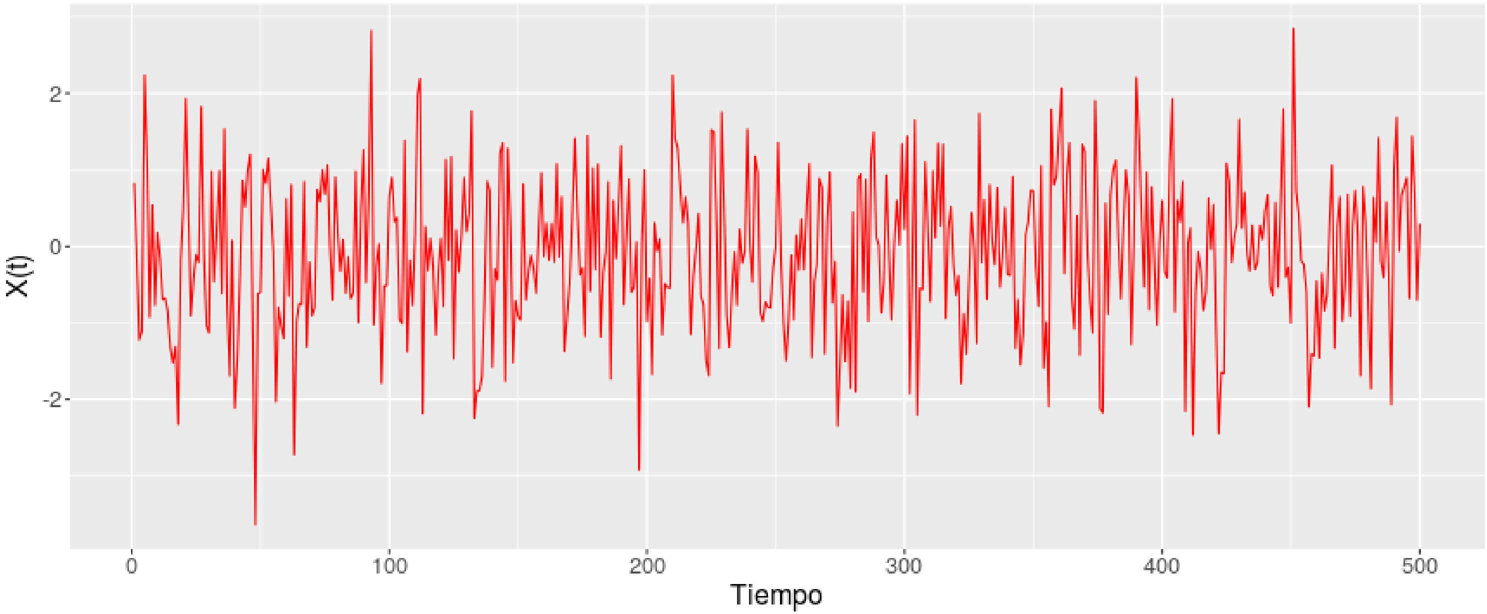
- $X(t)$ es estacionario
- $X(t)$ verifica:

$$X(t) = \alpha X(t-1) + e(t)$$

donde $e(t)$ es un proceso de ruido blanco con varianza σ_e^2, y $|\alpha| < 1$.

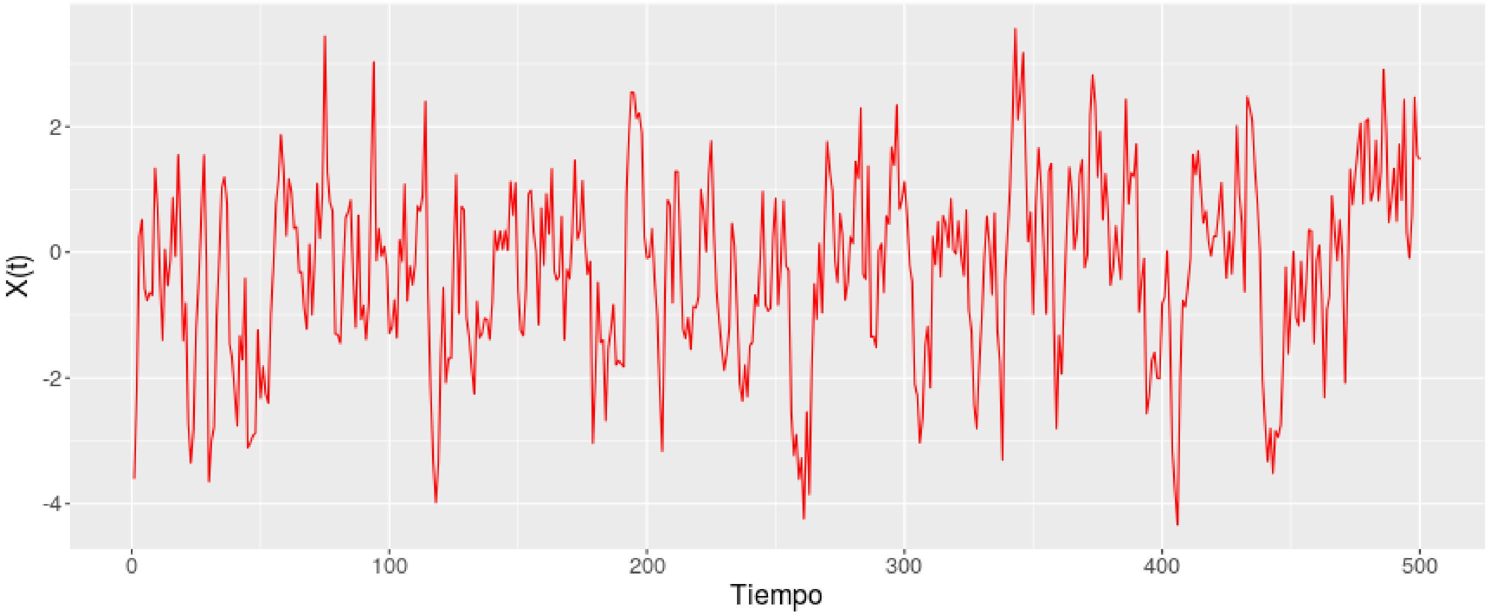
Ejemplo: proceso AR(1)

$$X(t) = 0.1X(t-1) + e(t), \quad e(t) \approx N(0, 0.01)$$



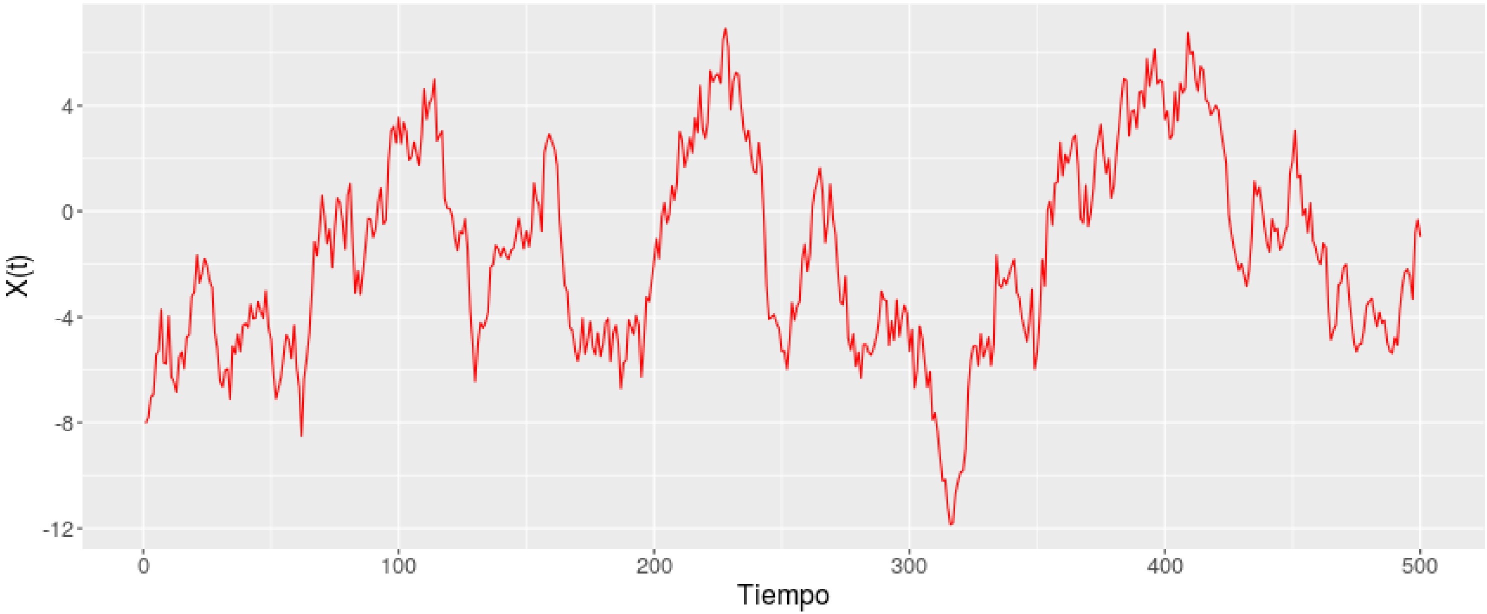
Ejemplo: proceso AR(1)

$$X(t) = 0.75X(t-1) + e(t), \quad e(t) \approx N(0, 0.01)$$



Ejemplo: proceso AR(1)

$$X(t) = 0.98X(t-1) + e(t), \quad e(t) \approx N(0, 0.01)$$



Nótese que cuanto más se aproxima α a 1 tanto más depende el valor $X(t)$ del valor anterior $X(t-1)$

Proceso AR(1): Esperanza

De la definición del proceso AR(1) se sigue que:

$$X(t) = \alpha X(t-1) + e(t) =$$

$$= \alpha(\alpha X(t-2) + e(t-1)) + e(t) =$$

$$= \alpha^2 X(t-2) + \alpha \cdot e(t-1) + e(t) =$$

$$= \alpha^3 X(t-3) + \alpha^2 e(t-2) + \alpha \cdot e(t-1) + e(t) = \ldots$$

Por lo que finalmente llegamos a que:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot e(t-k)$$

Como $E[e(t)] = 0 \; \forall t \Rightarrow E[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \cdot E[e(t-k)] = 0$

Proceso AR(1): Varianza

Si $X(t)$ es un proceso AR(1):

$$X\left(t\right) = \alpha X\left(t-1\right) + \varepsilon\left(t\right)$$

Teniendo en cuenta que $X(t-1)$ y $e(t)$ son incorrelados:

$$Var(X\left(t\right)) = \alpha^2 Var(X\left(t-1\right)) + Var(e\left(t\right))$$

Para que $X(t)$ sea estacionario su varianza σ_X^2 debe ser constante $\forall t$. Por tanto:

$$\sigma_X^2 = \alpha^2\sigma_X^2 + \sigma_e^2$$

Por tanto para un proceso AR(1) estacionario se tiene que:

$$\sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}$$

Proceso AR(1): Autocovarianza

Como el proceso $X(t)$ es incorrelado con el proceso $e(t-k)$:

$$R(\tau) = E\left[X(t)\,X(t+\tau)\right] = E\left[X(t)\left(\alpha X(t+\tau-1) + e(t+\tau-1)\right)\right] =$$

$$= \alpha R(\tau-1)$$

Procediendo recursivamente:

$$R(\tau) = \alpha R(\tau-1) = \alpha^2 R(\tau-2) = \cdots = \alpha^\tau R(0) = \alpha^\tau \sigma_X^2$$

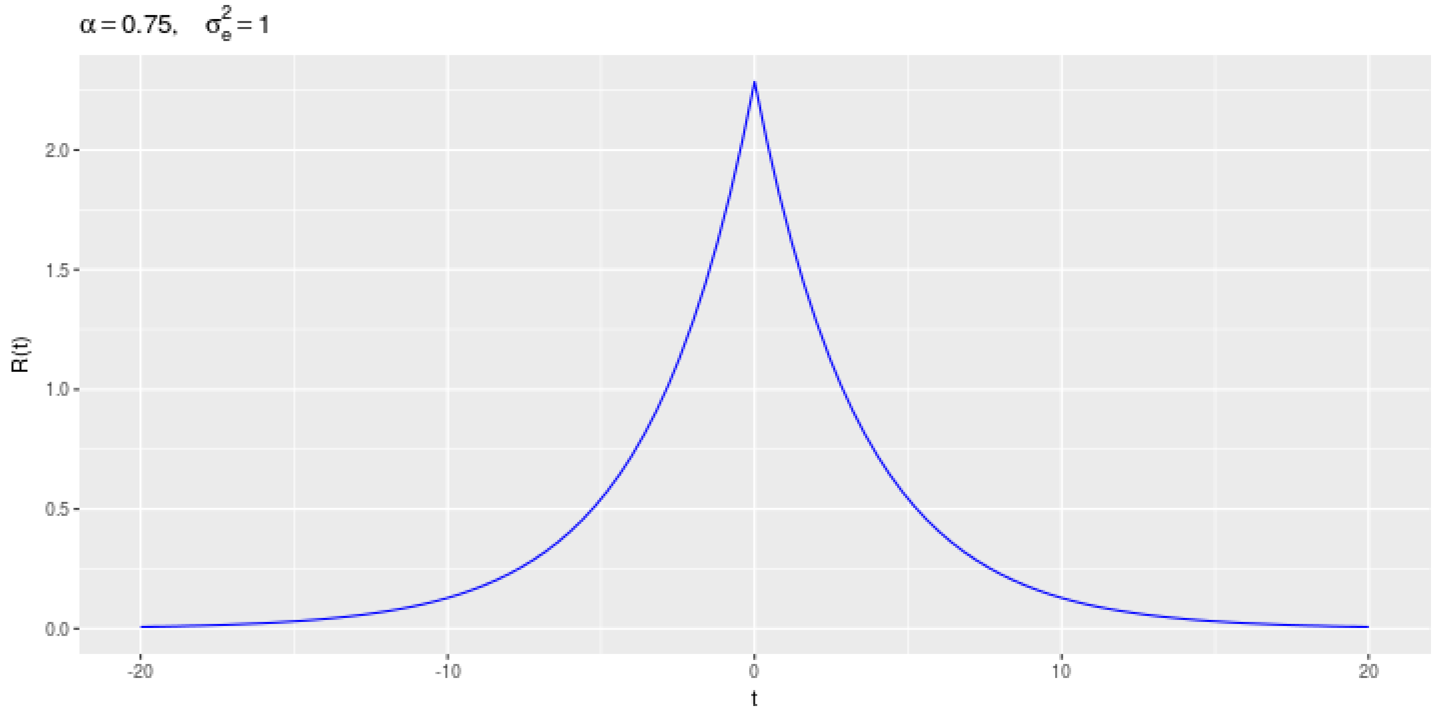
Para $\tau < 0$, como $R(\tau) = R(-\tau)$ se sigue que $R(\tau) = \alpha^{-\tau}\sigma_X^2$

Por tanto:

$$R(\tau) = \alpha^{|\tau|}\sigma_X^2 = \frac{\alpha^{|\tau|}\sigma_e^2}{1-\alpha^2}, \quad \tau \in \mathbb{Z}$$

Proceso AR(1): Autocovarianza

$$R(\tau) = \frac{\alpha^{|\tau|}\sigma_e^2}{1-\alpha^2}$$



Procesos de media móvil de orden q
MA(q)

Proceso de media móvil de orden q, MA(q)

Un proceso estacionario en tiempo discreto $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ es un **proceso de medias móviles de orden q** si:

$$X(t) = b_0 e(t) + b_1 e(t-1) + \ldots + b_q e(t-q)$$

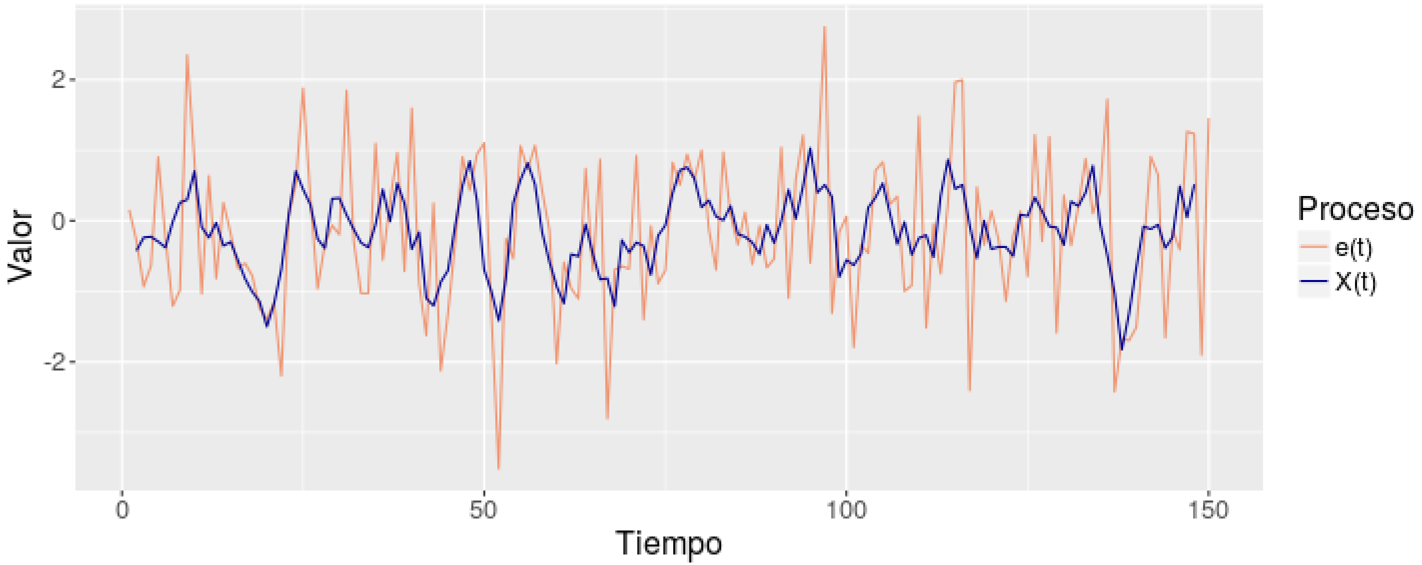
siendo $\{e(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ un ruido blanco.

Un proceso MA(q) es un **alisamiento** o **suavizado** de un ruido blanco.

Ejemplo: Proceso MA(4)

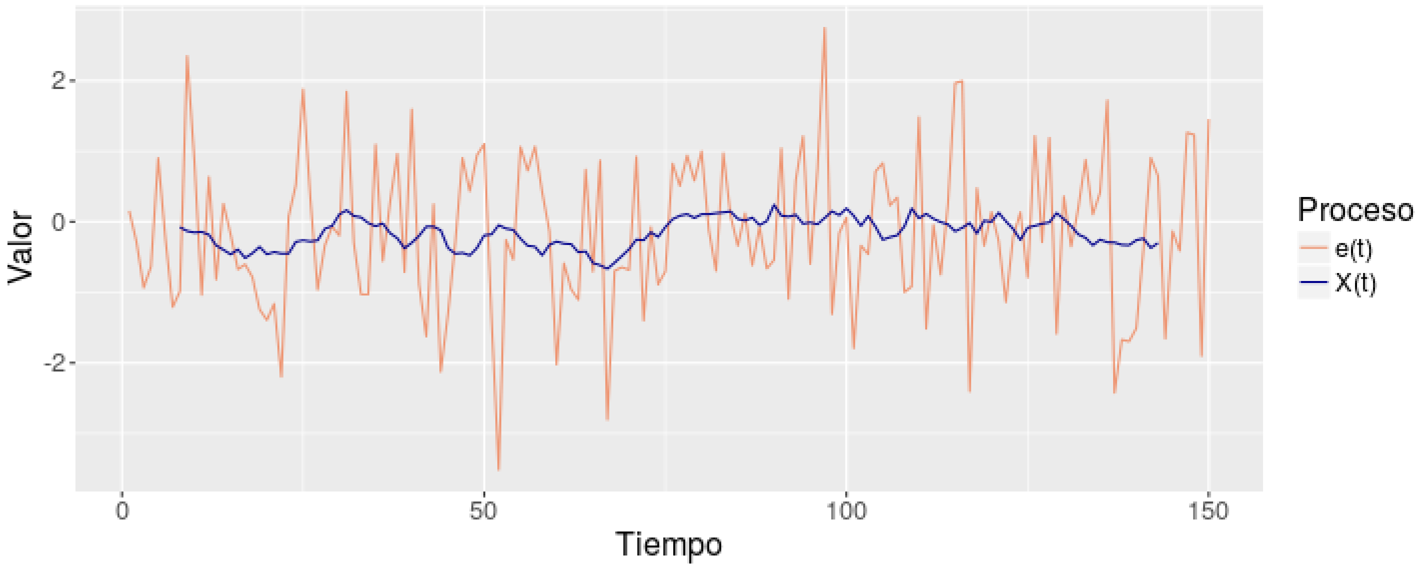
$$X(t) = \frac{1}{4}e(t) + \frac{1}{4}e(t-1) + \frac{1}{4}e(t-2) + \frac{1}{4}e(t-3) =$$

$$= \frac{e(t) + e(t-1) + e(t-2) + e(t-3)}{4}$$



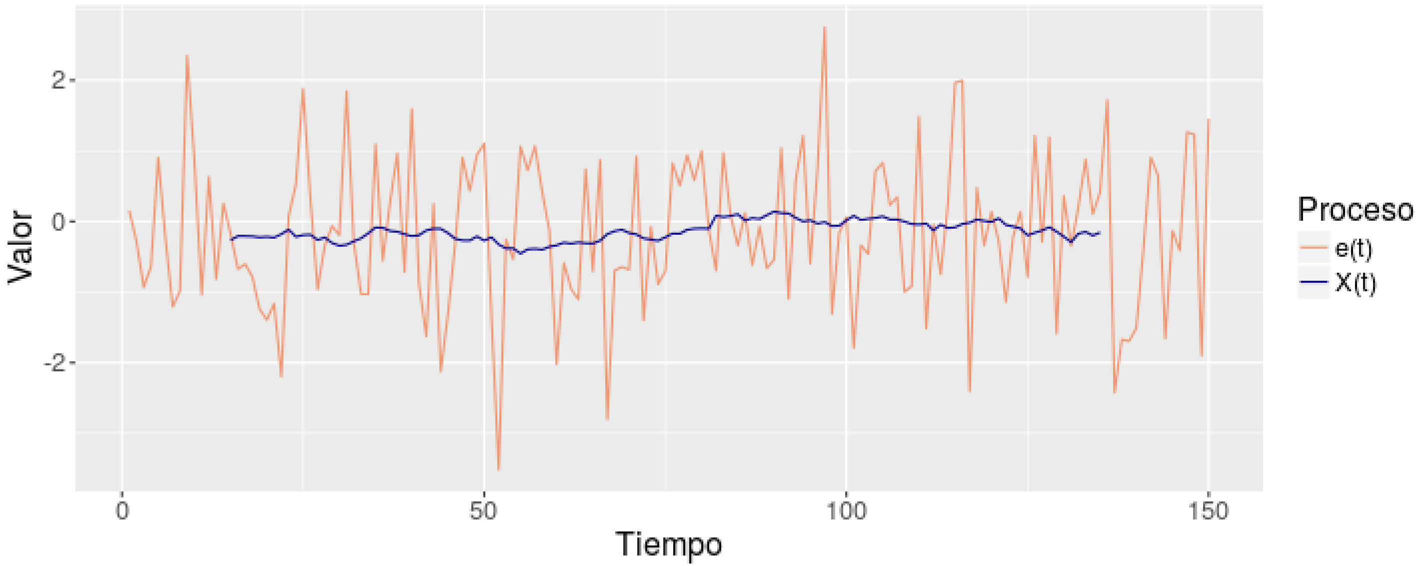
Ejemplo: Proceso MA(15)

Con q=15 se incrementa el nivel de suavizado del proceso $e(t)$:



Ejemplo: Proceso MA(30)

Con q=30 el suavizado es mucho mayor:



Procesos armónicos

Proceso armónico

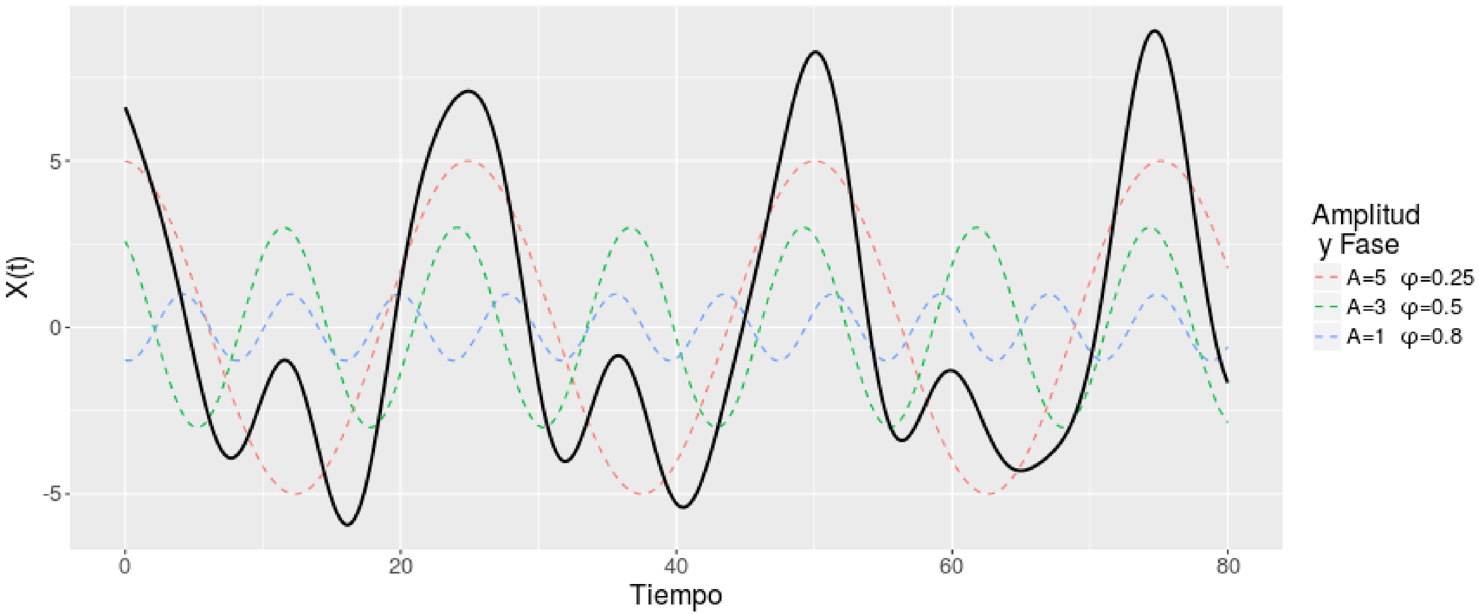
Ya hemos visto que un **Proceso Armónico** es un proceso estocástico de la forma:

$$X\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}A_k\cdot cos\left(\omega_k t+\varphi_k\right)$$

donde:

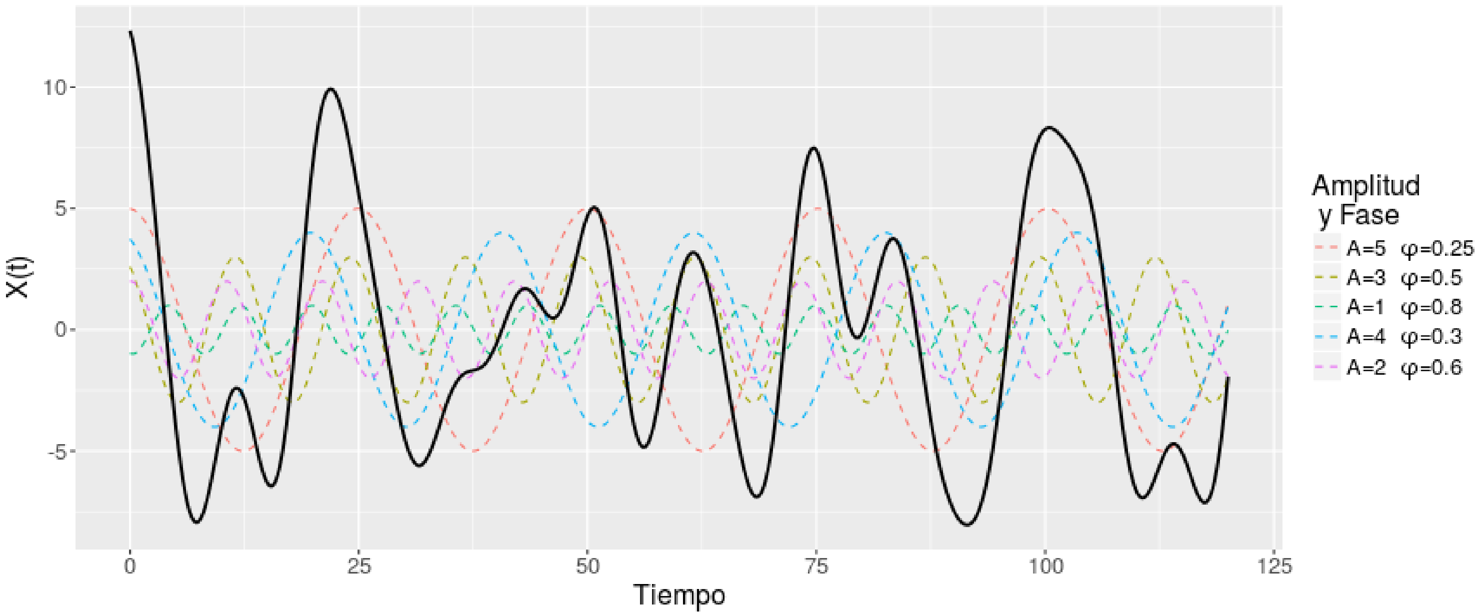
- Las amplitudes A_k son constantes.
- Las frecuencias ω_k son también constantes
- Las fases $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con distribución Uniforme en $[0, 2\pi]$

Ejemplo: Procesos armónicos: superposición de 3 armónicos



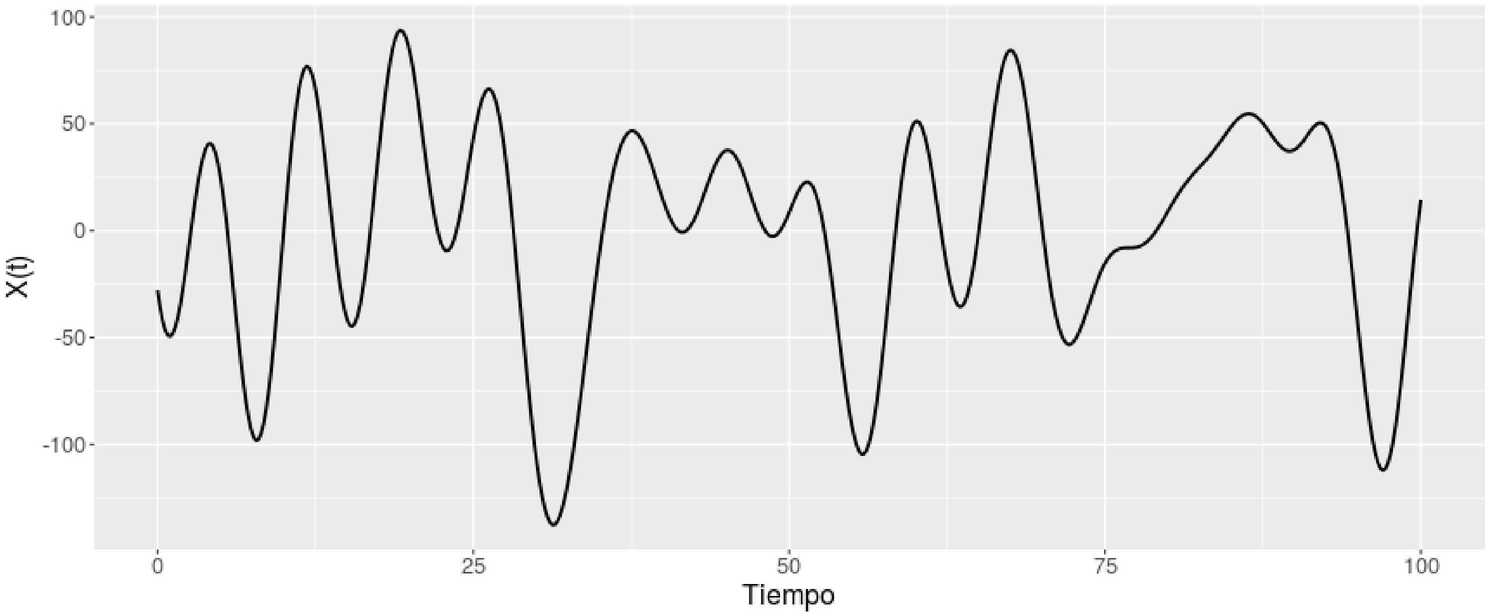
$$X\left(t\right)=5cos\left(0.25t+\varphi_{1}\right)+3cos\left(0.5t+\varphi_{2}\right)+cos\left(0.8t+\varphi_{3}\right)$$

Ejemplo: Procesos armónicos: superposición de 5 armónicos



$$X(t) = 5cos(0.25t + \varphi_1) + 3cos(0.5t + \varphi_2) + cos(0.8t + \varphi_3) +$$
$$+4cos(0.3t + \varphi_4) + 2cos(0.6t + \varphi_5)$$

Ejemplo: Superposición de 500 armónicos



$$X\left(t\right) = \sum_{k=1}^{500} A_k \cdot cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$$

Proceso armónico

Hemos visto también que para la k-esima componente armónica del proceso, $X_k(t) = A_k cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$, se tiene que:

- $E\left[X_k\left(t\right)\right] = 0\ \forall t.$
- $Cov\left(X_k\left(t\right), X_k\left(t+\tau\right)\right) = \frac{A_k^2}{2} cos\omega_k\tau\ \ \forall t$
- $\sigma_k^2 = Var\left(X_k\left(t\right)\right) = \frac{A_k^2}{2}\ \forall t$

Procesos armónicos generales

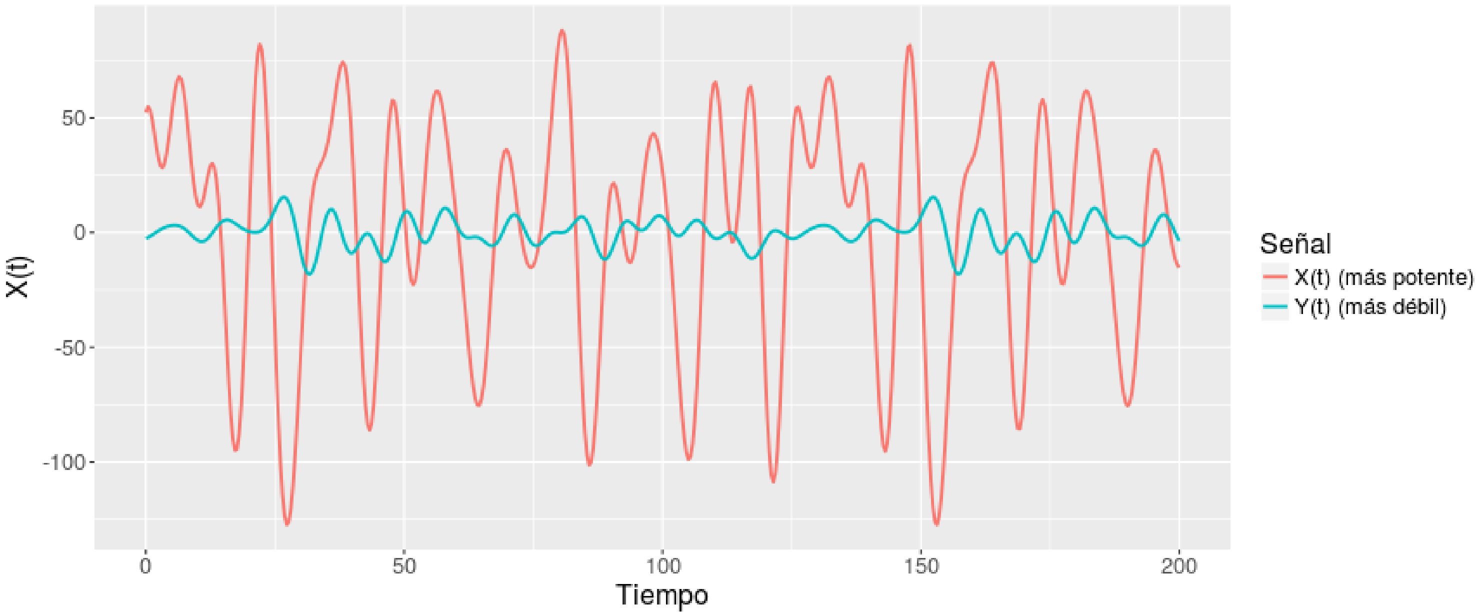
Dado un proceso armónico $X\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}A_{k}\cdot cos\left(\omega_{k}t+\varphi_{k}\right)$, donde las amplitudes A_k y las frecuencias ω_k son constantes y las fases φ_k son variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0,2\pi]$ se cumple que:

1. $E\left[X\left(t\right)\right]=0\ \forall t$

1. Debido a la independencia de las φ_k:

- $R(\tau)=Cov\left(X\left(t\right),X\left(t+\tau\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_{k}^{2}}{2}cos\omega_{k}\tau=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k}^{2}cos\omega_{k}\tau$
- $R(0)=\sigma_{X}^{2}=Var\left(X\left(t\right)\right)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k}^{2}$

Procesos armónicos generales



- Nótese que $Var(X(t)) > Var(Y(t))$
- La potencia de una señal es proporcional a la varianza del proceso que la representa.

Procesos armónicos generales

$$R(0) = \sigma_X^2 = Var\left(X\left(t\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

- Esta expresión implica que σ_k^2 es la contribución del armónico $X_k(t) = A_k cos(\omega_k t + \varphi)$ a la varianza del proceso $X(t)$.
- Dicha contribución es,además, proporcional al cuadrado de la amplitud del armónico, pues $\sigma_k^2 = \frac{A_k^2}{2}$
- Si interpretamos el proceso $X(t)$ como una **señal** la varianza σ_X^2 del proceso puede interpretarse como la **potencia** de la señal, y σ_k^2 como la contribución del armónico $X_k(t)$ a dicha potencia.
- Este es el fundamento de lo que se conoce como **análisis espectral**