Estadística y Procesos Estocásticos

Tema 1: Probabilidad

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

Fenómenos deterministas vs. fenómenos aleatorios.

- Dejamos caer un cuerpo desde una altura h. ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?
- Se aplica una fuerza F sobre un cuerpo de masa m. ¿Qué aceleración experimenta ese cuerpo?
- Se lanza al aire una moneda con dos caras ¿Cuál será el resultado?
- Encendemos una lámpara. ¿Cuánto durará antes de fundirse?
- Tiramos un dado. ¿Cuál es el número que va a salir?
- Lanzamos al aire una moneda no trucada. ¿Cuál será el resultado?
- Comenzamos la descarga de un archivo desde un servidor remoto ¿Se interrumpirá la descarga?
- Comenzamos la descarga de un archivo desde un servidor remoto ¿Cuánto durará la descarga?

Fenómenos deterministas.

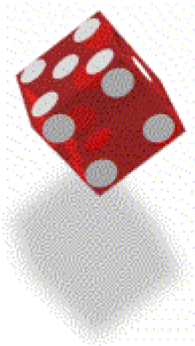
Son aquellos cuyo resultado puede predecirse exactamente.

- Tiempo que tarda un objeto en llegar al suelo cuando se deja caer desde una altura h conocida: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

- Aceleración que experimenta un cuerpo de masa m al aplicarle una fuerza F: $a = \frac{F}{m}$

- Resultado del lanzamiento de una moneda con dos caras: Cara

Fenómenos aleatorios.



Son aquellos cuyo resultado no puede predecirse exactamente.

- Duración de una lámpara.
- Número obtenido al lanzar un dado
- La descarga del archivo se interrumpe o no.
- Tiempo que se tarda en descargar un archivo de internet
- Resultado obtenido al lanzar la moneda (Cara o Cruz)

¿Medir el azar?

- Aunque un fenómeno sea aleatorio en muchas ocasiones podemos tener la certeza de que es más fácil que se produzcan unos resultados que otros.

Antes de definir el concepto de probabilidad...

Espacio muestral asociado a un fenómeno aleatorio

Conjunto de todos los posibles **resultados elementales** que puede presentar el fenómeno.

Ejemplos:

- Lanzamiento de un dado al azar. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Extraer una bola de una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 negras $\Omega = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5,\ n_1, n_2, n_3\}$
- Lanzar dos veces consecutivas un dado $\Omega = \{(i, j) :\ i, j = 1, \ldots, 6\}$
- Extraer dos bolas al azar sin reemplazamiento de la urna con 5 bolas blancas y 3 negras $\Omega =$ *Todas las parejas de bolas posibles* =

$$\begin{gathered}
\{(b_1, b_2), (b_1, b_3), (b_1, b_4), (b_1, b_5), (b_1, n_1), (b_1, n_2), (b_1, n_3), \\
(b_2, b_3), (b_2, b_4), (b_2, b_5), (b_2, n_1), (b_2, n_2), (b_2, n_3), (b_3, b_4), \\
(b_3, b_5), (b_3, n_1), (b_3, n_2), (b_3, n_3), (b_4, b_5), (b_4, n_1), (b_4, n_2), \\
(b_4, n_3), (b_5, n_1), (b_5, n_2), (b_5, n_3), (n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_3)\}
\end{gathered}$$

Espacio muestral asociado a un fenómeno aleatorio

Ejemplos:

- Instante en el que accede el primer usuario a un sistema de teletráfico con política FIFO (First In First Out):

$$\Omega = \mathbb{R}^+$$

- Instantes en que acceden los dos primeros usuarios a un sistema de teletráfico con política FIFO:

$$\Omega = \{(x, y) : 0 < x < y\}$$

- Número de llamadas recibidas en una centralita telefónica durante un día:

$$\Omega = \mathbb{N}$$

- Número de bits erróneos en un mensaje de 16 bits de longitud:

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 16\}$$

Sucesos

Un **suceso** es *cualquier resultado (no necesariamente elemental)* de un fenómeno aleatorio. Los sucesos son por tanto, subconjuntos del espacio muestral Ω.

Algunos sucesos de particular interés:

- **Suceso seguro**: es el que contiene todos los posibles resultados Ω
- **Suceso imposible**: es el que no contiene ninguno de los posibles resultados; se denota con el símbolo del conjunto vacío $\emptyset$
- **Suceso contrario**: Dado un suceso A, el contrario A^C, está formado por todos los resultados de Ω que no pertenecen a A.

Sucesos

- **Inclusión de sucesos**: Un suceso A está incluido o contenido en otro B, $A \subset B$, si siempre que ocurre A, ocurre también B
- **Unión**: La unión de dos sucesos A y B es otro suceso que se representa por $A \cup B$ y que consiste en la ocurrencia de al menos uno de los dos sucesos.
- **Intersección**: La intersección de dos sucesos A y B es otro suceso que se representa por $A \cap B$ y que consiste en la ocurrencia simultánea de ambos sucesos.

Ejercicio

Considérese el fenómeno aleatorio consistente en lanzar un dado

- Suceso seguro:
- $A = \textit{Obtener número par}$:
- Contrario de A:
- $B = \textit{Obtener número mayor que dos}$:
- $A \cup B = ?$
- $A \cap B = ?$

Ejercicio

Considérese el fenómeno aleatorio consistente en lanzar un dado

- Suceso seguro: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A = \textit{Obtener número par} = \{2, 4, 6\}$
- Contrario de A: $A^c = \{1, 3, 5\}$
- $B = \textit{Obtener número mayor que dos} = \{3, 4, 5, 6\}$
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{4, 6\}$

Diagramas de Venn

Las operaciones con sucesos pueden representarse, igual que en teoría de conjuntos, mediante diagramas de Venn:

$$A = \{2, 4, 6\}\,, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

Leyes de D´Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Sucesos

Incompatibilidad de sucesos

Dos sucesos A y B se dicen incompatibles si no pueden ocurrir simultáneamente: $A \cap B = \emptyset$

Sistema completo de sucesos

Los sucesos $A_1, \ldots, A_n$ forman un sistema completo si:

1. $\Omega = A_1 \cup \ldots \cup A_n$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$

Álgebra de sucesos

Sea Ω el espacio muestral asociado a un fenómeno aleatorio, y sea $\mathfrak{F}$ una colección de sucesos de Ω. El conjunto $\mathfrak{F}$ es un **álgebra de sucesos** si verifica:

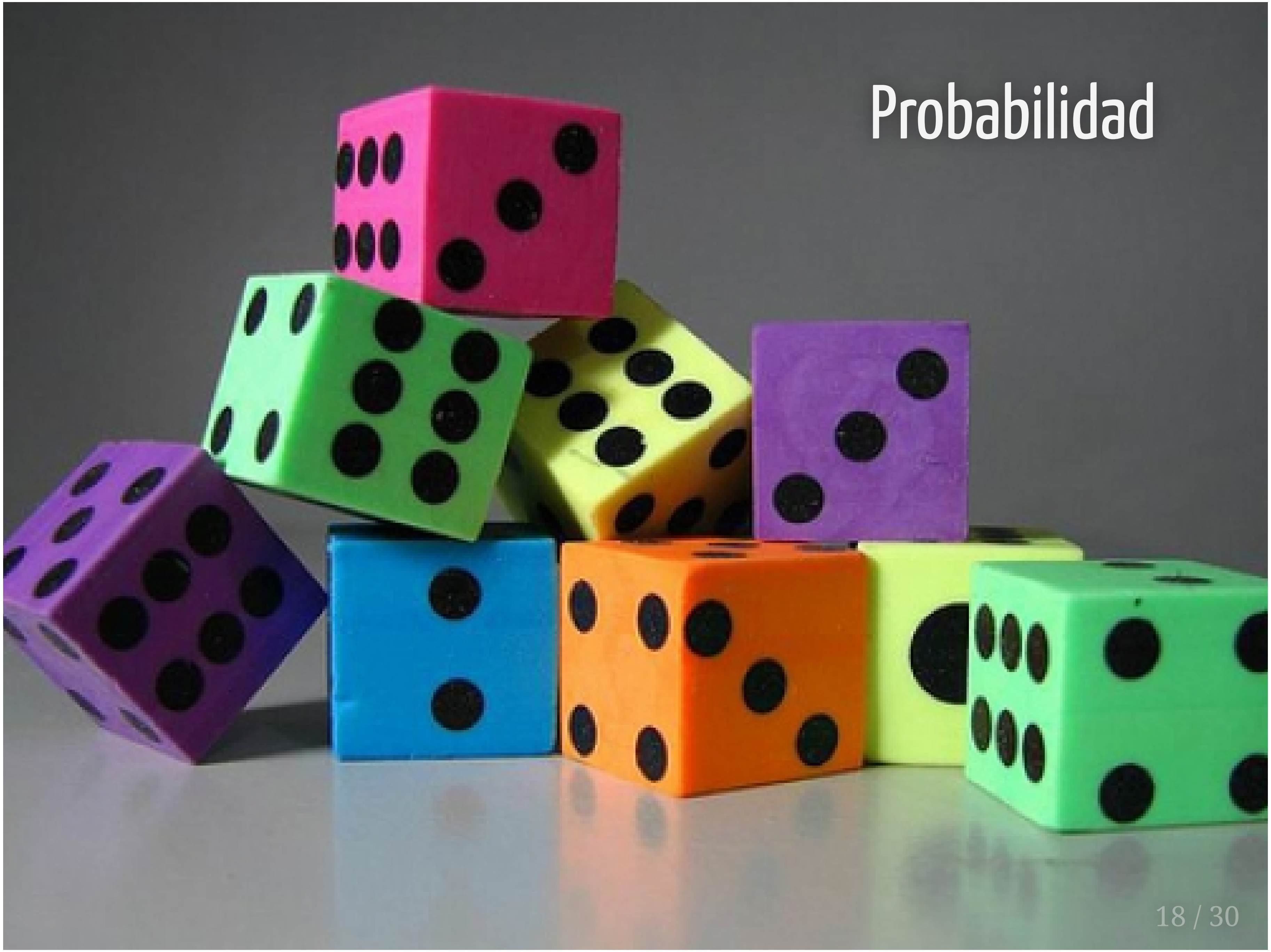
1. $\emptyset \in \mathfrak{F}$
2. Si $A \in \mathfrak{F}$ entonces $A^C \in \mathfrak{F}$
3. Si $A, B \in \mathfrak{F}$ entonces $A \cup B \in \mathfrak{F}$

Ejercicio

Probar que si $\mathfrak{F}$ es un álgebra de sucesos, entonces:

1. $\Omega \in \mathfrak{F}$
2. Si $A, B \in \mathfrak{F}$ entonces $A \cap B \in \mathfrak{F}$

Probabilidad



Medidas de probabilidad

Definición intuitiva: La probabilidad de un suceso es una medida de cuantificación de la verosimilitud de su ocurrencia

¿Cómo asignar valores de probabilidad a los sucesos de un espacio muestral?

Tres criterios:

- Probabilidad exacta
- Probabilidad frecuentista
- Probabilidad subjetiva

Definición axiomática de probabilidad

Sean:

- Ω el espacio muestral asociado a un fenómeno aleatorio
- $\mathfrak{F}$ un álgebra de sucesos sobre Ω

Una **medida de probabilidad** es una función definida sobre $\mathfrak{F}$ que satisface los siguientes axiomas:

1. $0 \leq \Pr(A) \leq 1 \ \ \forall A \in \mathfrak{F}\}$
2. $\Pr(\Omega) = 1$
3. Si $A, B \in \mathfrak{F}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces:

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$$

La terna $(\Omega, \mathfrak{F}, \Pr)$ se llama **espacio de probabilidad**

Algunas propiedades de la Probabilidad

1. $\Pr\left(\emptyset\right) = 0$

1. $\Pr\left(A^C\right) = 1 - \Pr\left(A\right)$

1. Si $A \subset B$, entonces $\Pr\left(A\right) \leq \Pr\left(B\right)$

1. $\Pr\left(A \cup B\right) = \Pr\left(A\right) + \Pr\left(B\right) - \Pr\left(A \cap B\right)$

Cálculo de probabilidades: Regla de Laplace

[Pierre Simon de Laplace en Wikipedia]

Sea Ω un espacio muestral finito en el que **todos sus resultados son equiprobables**.

Por tanto, si $\#\left(\Omega\right) = N$, la probabilidad de cada suceso elemental es $\frac{1}{N}$

Si consideramos un suceso A tal que $\#\left(A\right) = r$, entonces:

$$\Pr\left(A\right) = \frac{r}{N} = \frac{\text{Casos Favorables a A}}{\text{Casos Posibles}}$$

Ejemplo de aplicación de la Regla de Laplace

De una urna que contiene 5 bolas blancas y 3 negras se extraen 2 bolas, consecutivamente y sin reemplazamiento.

El espacio muestral Ω está formado por todas las variaciones de las 8 bolas que hay en la urna tomadas 2 a 2, lo que significa que $\#\left(\Omega\right) = 8 \cdot 7 = 56$.

Entonces:

- $\Pr\left(\text{Ambas blancas}\right) = \Pr\left(B \cap B\right) = \frac{\#(B\cap B)}{\#(\Omega)} = \frac{5\cdot 4}{56} = 0.357$
- $\Pr\left(\text{Primera blanca y segunda negra}\right) = \Pr\left(B \cap N\right) = \frac{\#(B\cap N)}{\#(\Omega)} = \frac{5\cdot 3}{56} = 0.268$
- $$\Pr\left(\text{Una blanca y otra negra}\right) = \Pr\left(B \cap N\right) + \Pr\left(N \cap B\right) = \frac{\#(B\cap N)+\#(N\cap B)}{P(\Omega)} = \frac{5\cdot 3+3\cdot 5}{56} = 0.536$$

Probabilidad condicionada

Un suceso A contiene información de otro suceso B, cuando la ocurrencia o no de A modifica la probabilidad de B.

Ejemplos:

- Se lanza un dado dos veces: si la primera vez sale un 2 ¿ello nos da alguna información sobre lo que saldrá la segunda vez?
- En una urna hay dos bolas blancas y una negra. Se sacan dos bolas, sucesivamente y sin reemplazamiento. ¿Informa el color de la primera bola sobre el color de la segunda?

Probabilidad condicionada

Se define la probabilidad del suceso B condicionado por el suceso A como:

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

Regla multiplicativa

De la definición de probabilidad condicionada se sigue que:

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B \mid A)$$

y también:

$$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A)\Pr(B \mid A)\Pr(C \mid A \cap B)$$

Algunas propiedades:

- $\Pr(\Omega \mid A) = 1$
- Si $B \cap C = \emptyset$, entonces $\Pr(B \cup C \mid A) = \Pr(B \mid A) + \Pr(C \mid A)$

Ejercicio

De una baraja española se extraen dos cartas. Calcular la probabilidad de que la primera sea copa y la segunda espada cuando:

(a) La primera carta se devuelve al mazo antes de extraer la segunda.

(b) La primera carta se deja fuera del mazo antes de extraer la segunda.

Independencia de sucesos

Un suceso B es **independiente** de A cuando A no contiene información sobre B, esto es:

$$\Pr(B \mid A) = \Pr(B)$$

Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B:

$$\Pr(A\,|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B\,|A)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(B)} = \Pr(A)$$

Por tanto A y B se dicen *mutuamente independientes* o simplemente **independientes**.

De la definición de probabilidad condicionada se sigue que los sucesos A y B son independientes, si y solo si :

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$$

Esta última probabilidad se puede generalizar a n sucesos independientes:

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)\cdots\Pr(A_n)$$

Teorema de la probabilidad total.

Sea $\{A_1, \dots A_n\}$ un sistema completo de sucesos definido sobre un espacio muestral Ω, y sea B un suceso arbitrario de Ω. El **teorema de la probabilidad total** especifica que:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B|A_i) \Pr(A_i)$$

Demostración:

$$B = (A_1 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

Como los sucesos $(A_i \cap B)$ son incompatibles dos a dos, se tiene que:

$$\Pr(B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} \Pr(B \mid A_i) \Pr(A_i)$$

Teorema de Bayes

Sea $\{A_1, \dots A_n\}$ un sistema completo de sucesos definido sobre un espacio muestral Ω, y sea B un suceso arbitrario de Ω. Entonces:

$$\Pr(A_i \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i)}{\Pr(B)} =$$

$$= \frac{\Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} \Pr(B \mid A_j)\Pr(A_j)}$$

Thomas Bayes en Wikipedia

Ejercicio: aplicación del teorema de Bayes

Considérense tres urnas con la siguiente composición de bolas blancas y negras:

- U_1 contiene tres bolas blancas y dos negras,
- U_2 cuatro blancas y dos negras y
- U_3 una blanca y cuatro negras.

Se selecciona una urna al azar y seguidamente una bola de la urna elegida.

a. Hallar la probabilidad de que la bola seleccionada sea blanca.

b. Probabilidad de que haya sido elegida la segunda urna supuesto que la bola extraída fue blanca.