

Estadística y Procesos Estocásticos

Tema 2: Variables Aleatorias

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

A detailed illustration of a satellite in space. The satellite is positioned in the lower right quadrant, featuring a central body with various instruments and two large, rectangular solar panel arrays extending outwards. Two prominent parabolic dish antennas are visible on the satellite's structure. In the background, a large, bright sun is partially obscured by the horizon of a planet, creating a dramatic lens flare effect with a gradient from yellow to red. The overall scene is set against a dark, starry space background.

9. Variables Aleatorias con Octave/Matlab.



Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab

El programa octave (o matlab) dispone de múltiples funciones para calcular valores de las funciones de densidad o distribución de muchas variables aleatorias de uso común, así como para calcular sus cuantiles o para generar valores aleatorios de dichas distribuciones.

En general todas estas funciones comparten un término común (por ejemplo **bin** para la distribución binomial), seguido de la terminación:

- **pdf** (*probability density function*) para la función de densidad de probabilidad.
- **cdf** (*cumulative density function*) para la función de distribución de probabilidad.
- **inv** para el cálculo de los cuantiles (valores inversos de la función de distribución).
- **rnd** (*random*) para la generación de valores aleatorios con dicha distribución.

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab

Esta tabla resume las funciones de uso más común:

| Distribución | Func. Densidad | Func. Distribución | Cuantiles |
|---------------------|-----------------------|---------------------------|------------------|
| Binomial | binopdf | binocdf | binoinv |
| Exponential | exppdf | expcdf | expinv |
| Gamma | gampdf | gamcdf | gaminv |
| Normal | normpdf | normcdf | norminv |
| Poisson | poisspdf | poisscdf | poissinv |
| Uniform | unifpdf | unifcdf | unifinv |
| Weibull | wblpdf | wblcdf | wblinv |

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab: Binomial

- $X \approx B(8, 0.6) : P(X = 4)$

```
binopdf(4,8,0.6)
```

```
>> ans = 0.23224
```

- $X \approx B(8, 0.6) : P(X \leq 4)$

```
binocdf(4,8,0.6)
```

```
>> ans = 0.40591
```

- $X \approx B(8, 0.6)$: Percentil 25

```
binoinv(0.25,8,0.6)
```

```
>> ans = 4
```

- $X \approx B(8, 0.6)$: Percentil 50

```
binoinv(0.5,8,0.6)
```

```
>> ans = 5
```

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab: Poisson

- $X \approx P(5) : P(X = 3)$

```
poisspdf(3,5)
```

```
>> ans = 0.14037
```

- $X \approx P(5) : P(X \leq 3)$

```
poisscdf(3,5)
```

```
>> ans = 0.26503
```

- $X \approx P(5)$: Percentil 20

```
poissinv(0.2,5)
```

```
>> ans = 3
```

- $X \approx P(5)$: Percentil 75

```
poissinv(0.75,5)
```

```
>> ans = 6
```

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab: Uniforme

- $X \approx U(1, 5) : f(3)$

```
unifpdf(3,1,5)
```

```
>> ans = 0.25000
```

- $X \approx U(1, 5) : F(3) = P(X \leq 3)$

```
unifcdf(3,1,5)
```

```
>> ans = 0.50000
```

- $X \approx U(1, 5)$: Percentil 30

```
unifinv(0.3,1,5)
```

```
>> ans = 2.2000
```

- $X \approx U(1, 5)$: Percentil 90

```
unifinv(0.9,1,5)
```

```
>> ans = 4.6000
```

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab: Exponencial

- $X \approx \text{exp}(3) : f(1)$

```
exppdf(1,1/3)
```

```
>> ans = 0.14936
```

- $X \approx \text{exp}(3) : F(1) = P(X \leq 1)$

```
expcdf(1,1/3)
```

```
>> ans = 0.95021
```

- $X \approx \text{exp}(3)$: Percentil 10

```
expinv(0.10,1/3)
```

```
>> ans = 0.035120
```

- $X \approx \text{exp}(3)$: percentil 95

```
expcdf(0.95,1/3)
```

```
>> ans = 0.94216
```

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab: Weibull

- $X \approx Weibull(\mu = 30, \kappa = 2)$
Densidad: $f(20)$

```
wblpdf(20,30,2)
```

```
>> ans = 0.028497
```

- $X \approx Weibull(\mu = 30, \kappa = 2)$:
 $F(20) = P(X \leq 20)$

```
wblcdf(20,30,2)
```

```
>> ans = 0.35882
```

- $X \approx Weibull(\mu = 30, \kappa = 2)$:
Percentil 5

```
wblinv(0.05,30,2)
```

```
>> ans = 6.7944
```

- $X \approx Weibull(\mu = 30, \kappa = 2)$:
Percentil 80

```
wblinv(0.80,30,2)
```

```
>> ans = 38.059
```

Distribuciones de Probabilidad en octave/matlab: Normal

- $X \approx N(0, 1) : f(1.5)$

```
normpdf(1.5,0,1)
```

```
>> ans = 0.12952
```

- $X \approx N(0, 1) :$
 $F(1.5) = P(X \leq 1.5)$

```
normcdf(1.5,0,1)
```

```
>> ans = 0.93319
```

- $X \approx N(0, 1)$: Percentil 2.5

```
norminv(0.025,0,1)
```

```
>> ans = -1.9600
```

- $X \approx N(0, 1)$: Percentil 97.5

```
norminv(0.975,0,1)
```

```
>> ans = 1.9600
```

Simulación de variables aleatorias

Simulación de variables aleatorias

Una de las propiedades más interesantes de la distribución uniforme es que sirve de base para **simular** variables aleatorias que tengan otras distribuciones de probabilidad.

El fundamento teórico para ello lo proporciona el siguiente:

Teorema: Sea $F(x)$ una función de distribución acumulativa continua y estrictamente creciente y sea $U \approx U[0, 1]$. Entonces, la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$ tiene a $F(x)$ como función de distribución.

De esta forma, *si disponemos de algún mecanismo para simular valores con distribución uniforme*, podemos utilizarlo para simular valores de otras distribuciones.

Simulación de valores con distribución $U[0, 1]$ usando la calculadora.

La mayoría de las calculadoras científicas ofrecen la posibilidad de generar valores aleatorios con distribución uniforme en $[0, 1]$.



Habitualmente ello se consigue simplemente pulsando las teclas **SHIFT RAN#**

Simulación de valores con distribución $U[a, b]$ en octave/matlab

El programa **octave/matlab** dispone de la función **unifrnd** para generar valores aleatorios con distribución uniforme en $(0, 1)$.

Concretamente, la sintaxis **unifrnd(a,b,[m n])** indica a octave que debe generar una matriz de dimensión $m \times n$ cuyos valores son aleatorios con distribución $U[a, b]$

Por ejemplo, para generar un vector con 10 valores aleatorios de dicha distribución escribimos:

```
unifrnd(0,1,[1 10])

>> ans =
>>
>> Columns 1 through 7:
>>
>>    0.388576    0.615473    0.811938    0.184502    0.896606    0.600498    0.827
>>
>> Columns 8 through 10:
>>
>>    0.577019    0.085283    0.120251
```

Simulación de variables aleatorias con distribución no uniforme.

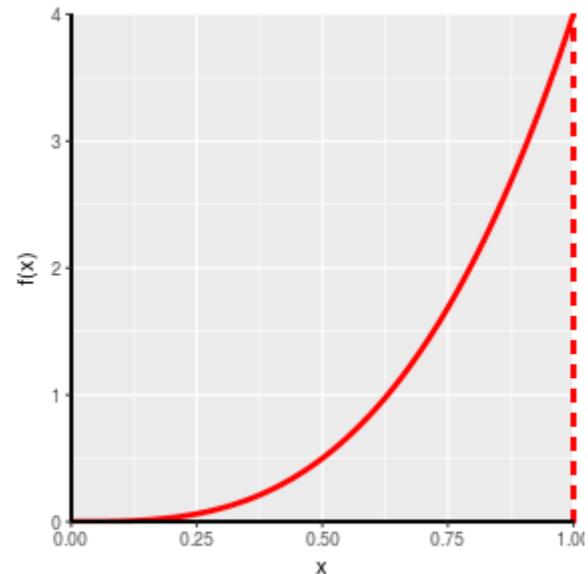
Ejemplo:

Se desea simular n valores de una variable aleatoria X con función de distribución:

$$F(x) = x^4 : 0 \leq x \leq 1$$

La función de densidad en este caso es:

$$f(x) = 4x^3, \quad 0 \leq x \leq 1$$



Esta función de densidad nos indica que una simulación correcta debe producir más valores entre 0.75 y 1 (región más probable) que entre 0 y 0.25 (región poco probable).

Simulación de variables aleatorias con distribución no uniforme.

Ejemplo:

El procedimiento a seguir para simular esta variable aleatoria es el siguiente:

[1] Calculamos la función inversa $F^{-1}(u)$:

Para ello tengamos en cuenta que si $u = F(x) \Rightarrow x = F^{-1}(u)$. Entonces:

$$F(x) = x^4 \Rightarrow u = x^4 \Rightarrow x = u^{1/4} \Rightarrow F^{-1}(u) = u^{1/4}$$

[2] Simulamos n valores u_1, u_2, \dots, u_n con distribución uniforme en $[0, 1]$

[3] Calculamos los n valores x_1, x_2, \dots, x_n mediante $x_i = F^{-1}(u_i) = u_i^{1/4}$. Los valores x_1, x_2, \dots, x_n así obtenidos tienen la distribución $F(x)$

Simulación de variables aleatorias con calculadora. Ejemplo:

Para simular n valores de la distribución $F(x)$ anterior utilizando la calculadora:



1. Obtenemos un número aleatorio uniforme en $[0, 1]$ pulsando las teclas **SHIFT RAN#**
2. Lo convertimos en un valor de la distribución $F(x)$ mediante $x = F^{-1}(u) = u^{1/4}$
3. Repetimos los pasos 1 y 2 anteriores n veces.

Simulación de variables aleatorias con octave/matlab. Ejemplo:

```
n=1000;  
U=unifrnd(0,1,[1,n]);  
X=U.^(1/4);  
hist(X);  
ylabel("Frecuencia");  
title("Histograma de valores de X");
```

| | X |
|----|-----------|
| 1 | 0.7278952 |
| 2 | 0.9606978 |
| 3 | 0.8702249 |
| 4 | 0.9363500 |
| 5 | 0.8663119 |
| 6 | 0.7269789 |
| 7 | 0.8156554 |
| 8 | 0.8724505 |
| 9 | 0.8218989 |
| 10 | 0.8075675 |
| ⋮ | ⋮ |

