Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 2: Variables Aleatorias

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

8. Función Característica

Función Característica

Es una herramienta que permite simplificar en muchos problemas el manejo de las distribuciones de probabilidad.

Se define como:

$$\varphi\left(u\right) = E\left[e^{iuX}\right])$$

Por tanto, si X es discreta con función de probabilidad P:

$$\varphi\left(u\right) = \sum_{k} e^{iux} P\left(X = x\right)$$

y si X es continua con función de densidad $f\left(x\right)$:

$$\varphi\left(u\right) = \int e^{iux} f\left(x\right) dx$$

Teorema: Sea X una variable aleatoria tal que $E\left[X^n\right] < \infty$ para algún valor $n \geq 1$. Entonces existe la k-ésima derivada de $\varphi\left(u\right)$ para todo $k \leq n$, y además:

$$\varphi^{(k)}\left(0\right) = i^k E\left[X^k\right]$$

De donde:

$$E\left[X^k\right] = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}\left(0\right)$$

Función característica: Distribución de Bernoulli

Sea X una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, esto es:

$$X = \begin{cases} 0 & 1-p \\ 1 & p \end{cases}$$

- Función característica:

$$\varphi\left(u\right) = E\left[e^{iuX}\right] = \sum_{x=0}^{1} e^{iux} P\left(X = x\right) =$$
$$= e^{iu\cdot 0}\left(1-p\right) + e^{iu\cdot 1} p = \left(1-p\right) + pe^{iu}$$

- Esperanza:

$$E\left[X\right] = \frac{1}{i}\varphi'\left(0\right) = \frac{1}{i}\cdot p \cdot i \cdot e^{i\cdot 0} = p$$

- Varianza:

$$E\left[X^2\right] = \frac{1}{i^2}\varphi''\left(0\right) = \frac{1}{i^2}\cdot p \cdot i^2 \cdot e^{i\cdot 0} = p$$

$$Var\left(X\right) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 = p - p^2 = p\left(1-p\right)$$

Función característica: Distribución binomial

Sea X una variable aleatoria con distribución binomial $b\left(n,p\right)$. Entonces:

$$P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\;\; k=0,1,\ldots,n$$

- Función característica:

$$\varphi\left(u\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}P\left(X=k\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(p\cdot e^{iu}\right)^k(1-p)^{n-k}=\left(p\cdot e^{iu}+1-p\right)^n$$

- Esperanza:

$$\varphi'\left(u\right)=n\left(p\cdot e^{iu}+1-p\right)^{n-1}p\cdot i\cdot e^{iu}\Rightarrow\varphi'\left(0\right)=n\cdot p\cdot i\Rightarrow E\left[X\right]=\frac{1}{i}\varphi'\left(0\right)=np$$

- Varianza:

$$Var\left(X\right)=E\left[X^2\right]-\left(E\left[X\right]\right)^2=\frac{1}{i^2}\varphi''\left(0\right)-\left(\frac{1}{i}\varphi'\left(0\right)\right)^2=\cdots=np\left(1-p\right)$$

Función característica: Distribución de Poisson

Sea X una variable aleatoria con distribución de Poisson, esto es:

$$\Pr\left(X = x\right) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} \ : \ x = 0, 1, 2, \ldots$$

- Función característica:

$$\varphi\left(u\right) = E\left[e^{iuX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux} P\left(X = x\right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux} e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!} =$$

$$= e^{-\mu}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\left(\mu e^{iu}\right)^x}{x!} = e^{-\mu}e^{\mu e^{iu}} = e^{\mu\left(e^{iu}-1\right)}$$

- Esperanza:

$$\varphi'\left(u\right) = i\mu e^{iu}e^{\mu\left(e^{iu}-1\right)} \Rightarrow \varphi'\left(0\right) = i\mu \Rightarrow E\left[X\right] = \frac{1}{i}\varphi'\left(0\right) = \mu$$

- Varianza:

$$Var\left(X\right) = E\left[X^2\right] - \left(E\left[X\right]\right)^2 = \frac{1}{i^2}\varphi''\left(0\right) - \left(\frac{1}{i}\varphi'\left(0\right)\right)^2 = \cdots = \mu$$

Función característica: Distribución exponencial

Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial, esto es:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \;\; x \geq 0$$

- Función característica:

$$\varphi(u) = \int_0^{\infty} e^{iux} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{iux} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - iu)x} dx =$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - iu} \left[-e^{-(\lambda - iu)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - iu}$$

- Esperanza:

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda i}{(\lambda - iu)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = \frac{i}{\lambda} \Rightarrow E[X] = \frac{\varphi'(0)}{i} = \frac{1}{\lambda}$$

- Varianza:

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2 = \frac{1}{i^2} \varphi''(0) - \left(\frac{1}{i} \varphi'(0) \right)^2 = \cdots = \frac{1}{\lambda}$$

Función característica: Distribución normal

Sea X una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma)$, esto es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \; x \in \mathbb{R}$$

- Función característica:

$$\varphi(u) = e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}$$

(véase aquí una demostración)

- Esperanza:

$$\varphi'(u) = \left(i\mu - \sigma^2 u\right) e^{i\mu u - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2} \Rightarrow \varphi'(0) = i\mu \Rightarrow E[X] = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \mu$$

- Varianza:

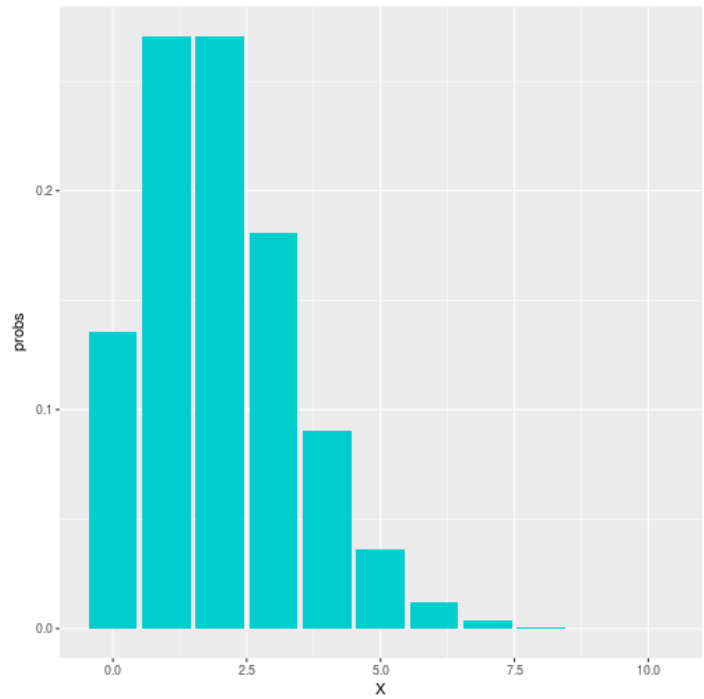
$$Var(X) = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2 = \frac{1}{i^2}\varphi''(0) - \left(\frac{1}{i}\varphi'(0)\right)^2 = \cdots = \sigma^2$$

Interpretación de la función característica

Supongamos que X es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\mu = 2$. Su función de probabilidad es de la forma:

$$\Pr(X = x) = e^{-2}\frac{2^x}{x!} \;:\; x = 0, 1, 2, \ldots$$

X	Prob
0	0.1353
1	0.2707
2	0.2707
3	0.1804
4	0.0902
5	0.0361
6	0.0120
7	0.0034
8	0.0009
9	0.0002
10	0.0000



Podemos expresar la función característica como:

$$\varphi(u) = E\left[e^{iuX}\right] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{iux} P(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \left(\cos(ux) + i \operatorname{sen}(ux)\right) P(X=x) =$$
$$= \sum_{x=0}^{\infty} \cos(ux) P(X=x) + i \sum_{x=0}^{\infty} \operatorname{sen}(ux) P(X=x) =$$

Por tanto, llamando $p_x = P(X=x)$

- La parte real es una suma ponderada de términos periódicos $\cos(ux)$ con $x = 0, 1, 2, \ldots$:

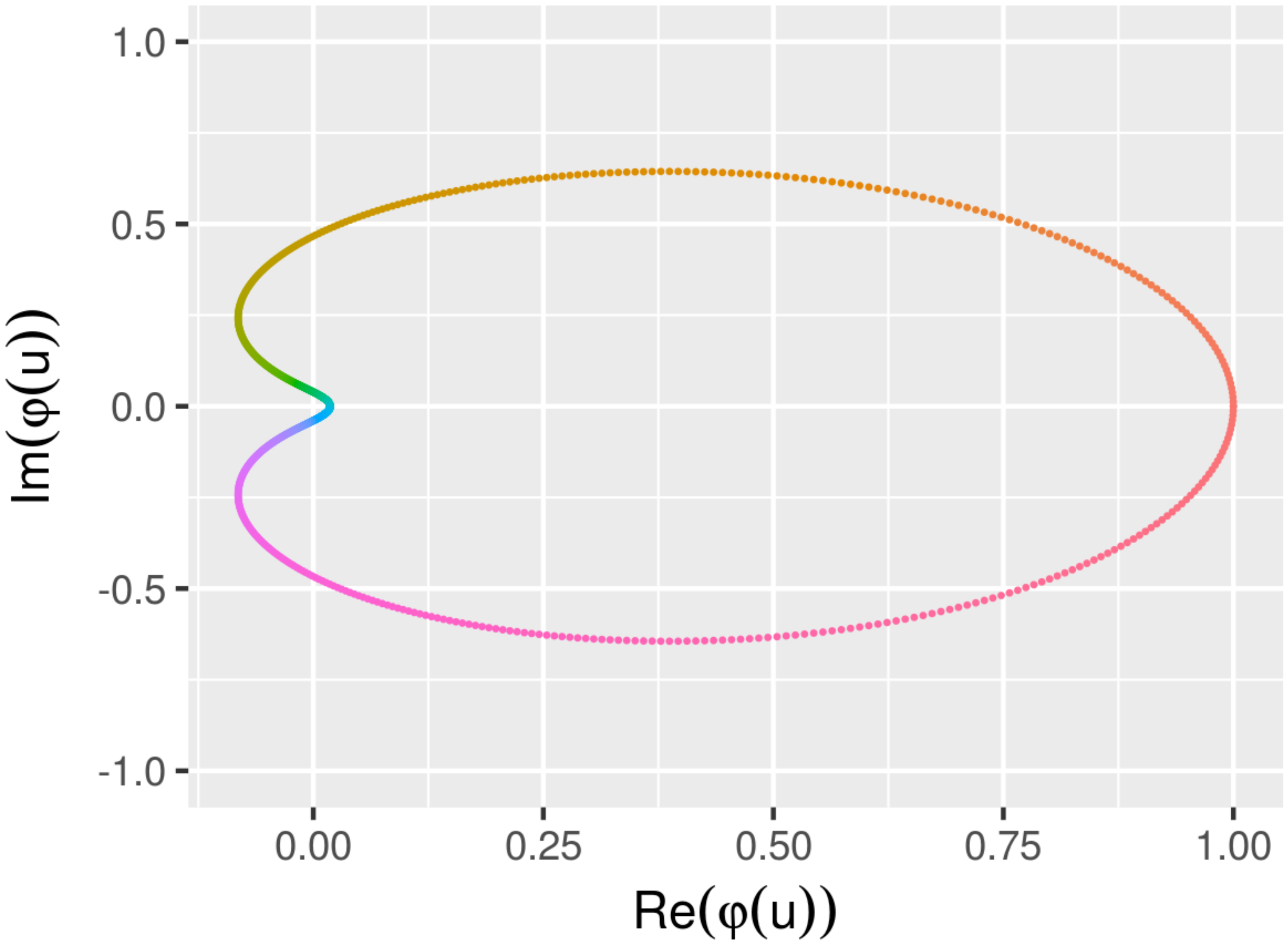
$$\cos(0)p_0 + \cos(u)p_1 + \cos(2u)p_2 + \cos(3u)p_3 + \ldots$$

- Análogamente, la parte imaginaria es también una suma ponderada de términos periódicos $\operatorname{sen}(ux)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\operatorname{sen}(0)\, p_0 + \operatorname{sen}(u)\, p_1 + \operatorname{sen}(2u)\, p_2 + \operatorname{sen}(3u)\, p_3 + \ldots$$

Gráficamente, cuando $u \in [0, 2\pi]$:

Y si representamos la parte imaginaria frente a la parte real:



- Podemos decir por tanto que la función característica contiene **la misma información** que la función de probabilidad; lo que hace la función característica es *codificar* las probabilidades de los distintos valores de la variable X en distintas frecuencias, haciendo coincidir la amplitud de cada frecuencia con la probabilidad del valor correspondiente.

- La interpretación geométrica en el caso de otras variables aleatorias discretas es análoga al caso de la variable de Poisson.

- La interpretación en el caso de las variables continuas es similar, salvo que lo que se codifica en este caso son los valores de la función de densidad de probabilidad.

- Así pues, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria puede caracterizarse de manera equivalente mediante su función de distribución o mediante su función característica.

Teorema (de inversión de la función característica): Sea X una variable aleatoria con densidad de probabilidad $f(t)$ y función característica $\varphi(u)$. Se tiene entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} \varphi(u)\, du$$

En el caso discreto:

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} \varphi(u)\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$