Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 2: Variables Aleatorias

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

7. Distribuciones de probabilidad continuas especiales

Distribución exponencial

Distribución exponencial

- Esta distribución aparece asociada a fenómenos en los que la variable que se considera es la distancia entre eventos puntuales que se presentan en un medio continuo de acuerdo con una distribución de Poisson.

- Supongamos que $Y_t \approx P(\lambda t)$ cuenta el número de paquetes que llegan a un conmutador durante un intervalo de tiempo de duración t.

- Sea X el tiempo que falta hasta que llegue el siguiente paquete.

- La probabilidad de que hasta el próximo paquete pase un tiempo mayor que t es igual a la probabilidad de que en un intervalo de longitud t no llegue ningún paquete:

$$P\left(X \leq t\right) = 1 - P\left(X > t\right) = 1 - P\left(Y_t = 0\right) = 1 - e^{-\lambda t} \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

- Si λ es el número medio de paquetes que llegan por unidad de tiempo, $\mu = \frac{1}{\lambda}$ es el tiempo medio que transcurre entre paquete y paquete.

Distribución exponencial

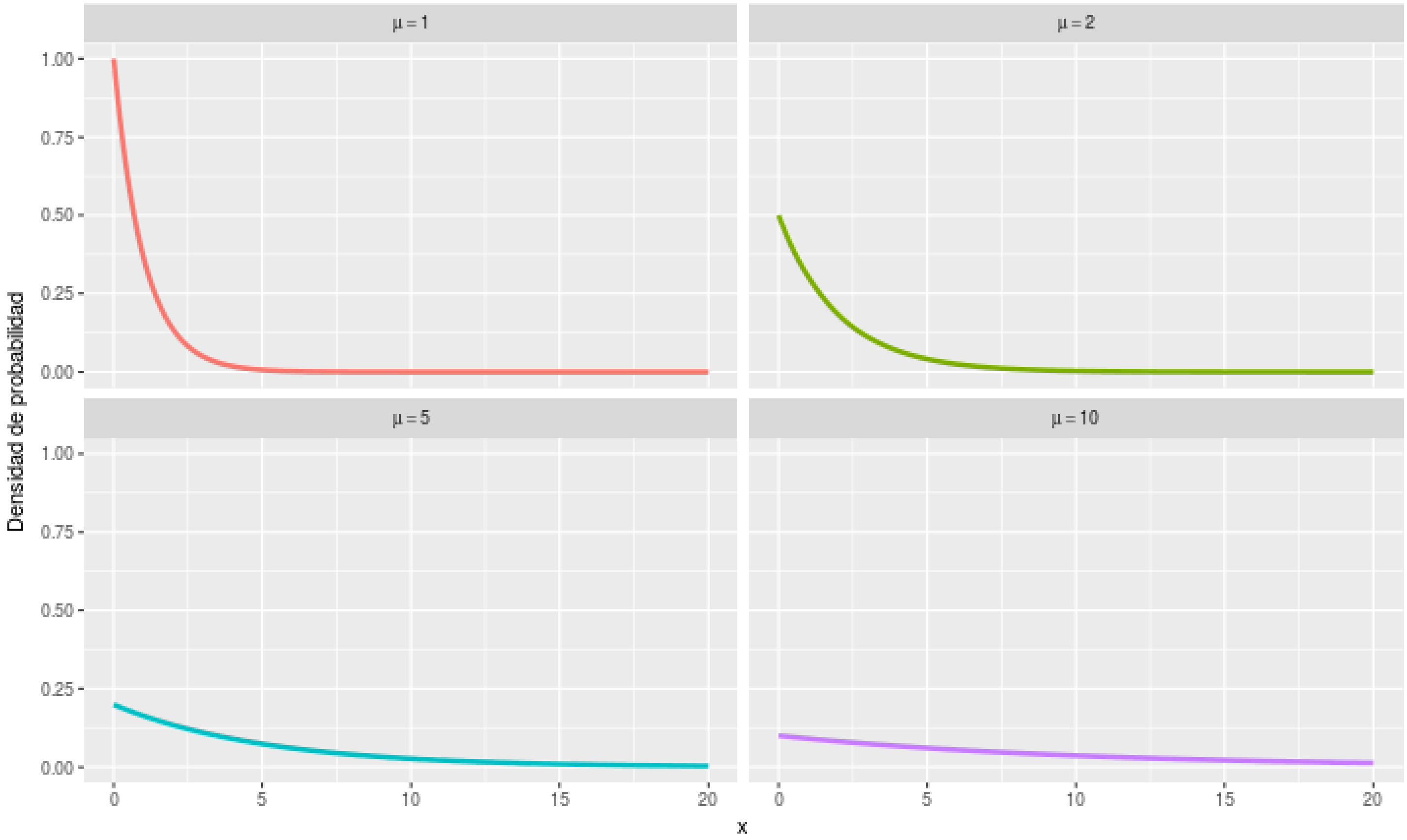
La variable aleatoria X se dice que sigue una **distribución exponencial** de parámetro μ, y se denota como $X \approx exp(\mu)$, si su función de distribución es de la forma:

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{1}{\mu}t}$$

Su función de densidad es entonces:

$$f(t) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}t}$$

Representación gráfica de la función de densidad de la distribución exponencial para varios valores de μ



Ejemplo:

El tiempo entre llegadas de paquetes a un conmutador sigue una distribución exponencial de parámetro $\mu = 6\ ms$

(1). ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo paquete tarde menos de 4 ms. en llegar?

$$X \approx exp(6) \Rightarrow P\left(X \leq 4\right) = F\left(4\right) = 1 - e^{-\frac{4}{6}} = 0.4866$$

(2). ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo paquete tarde más de 6 ms. en llegar?

$$P\left(X > 6\right) = 1 - F\left(6\right) = e^{-\frac{6}{6}} = 0.3679$$

(3). ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo paquete tarde en llegar entre 2 y 5 ms?

$$P\left(2 \leq X \leq 5\right) = \int_2^5 \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}x} dx = \left[-e^{-\frac{1}{6}x}\right]_2^5 = e^{-\frac{2}{6}} - e^{-\frac{5}{6}} = 0.2819$$

Esperanza de la distribución exponencial

$$E[X] = \mu$$

Demostración:

$$E\left[X\right] = \int_0^{\infty} x f\left(x\right) dx = \int_0^{\infty} x \frac{1}{\mu} e^{-\frac{1}{\mu}x} dx =$$

Haciendo la integral por partes:

$$= -xe^{-\frac{1}{\mu}x} + \int e^{-\frac{1}{\mu}x} dx = \left[-xe^{-\frac{1}{\mu}x} - \mu e^{-\frac{1}{\mu}x}\right]_0^{\infty} = \mu$$

Varianza

$$Var(X) = \mu^2$$

La *falta de memoria* de la distribución exponencial

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t) \;\; \forall s$$

Es decir: *"Habiendo transcurrido ya un tiempo s desde la última llegada, la probabilidad de que aún falte un tiempo t hasta la siguiente llegada es independiente del valor de s"*

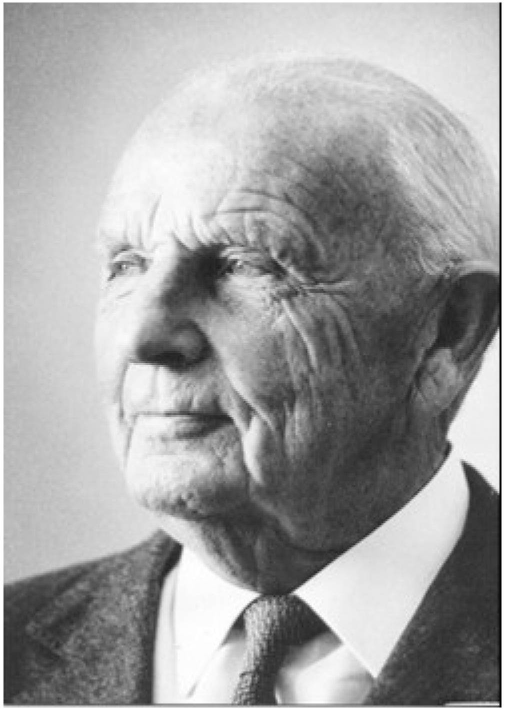
Demostración:

$$\Pr\left(X > s + t \mid X > s\right) = \frac{\Pr\left(\{X > s\} \cap \{X > s + t\}\right)}{\Pr\left(X > s\right)} = \frac{\Pr\left(X > s + t\right)}{\Pr\left(X > s\right)} =$$

$$\frac{e^{-\frac{(s+t)}{\mu}}}{e^{-\frac{s}{\mu}}} = e^{-\frac{t}{\mu}} = \Pr\left(X > t\right)$$

Distribución de Weibull

Distribución de Weibull



Waloddi Weibull (1887-1979)

La distribución de Weibull constituye una extensión de la distribución exponencial que evita la falta de memoria de esta última. Se utiliza ampliamente en teletráfico y fiabilidad. Su función de distribución es:

$$F(t) = 1 - e^{-(t/\mu)^{\kappa}}, \quad t \geq 0$$

Los parámetros μ y κ reciben el nombre de parámetros de **escala** y **forma**, respectivamente.

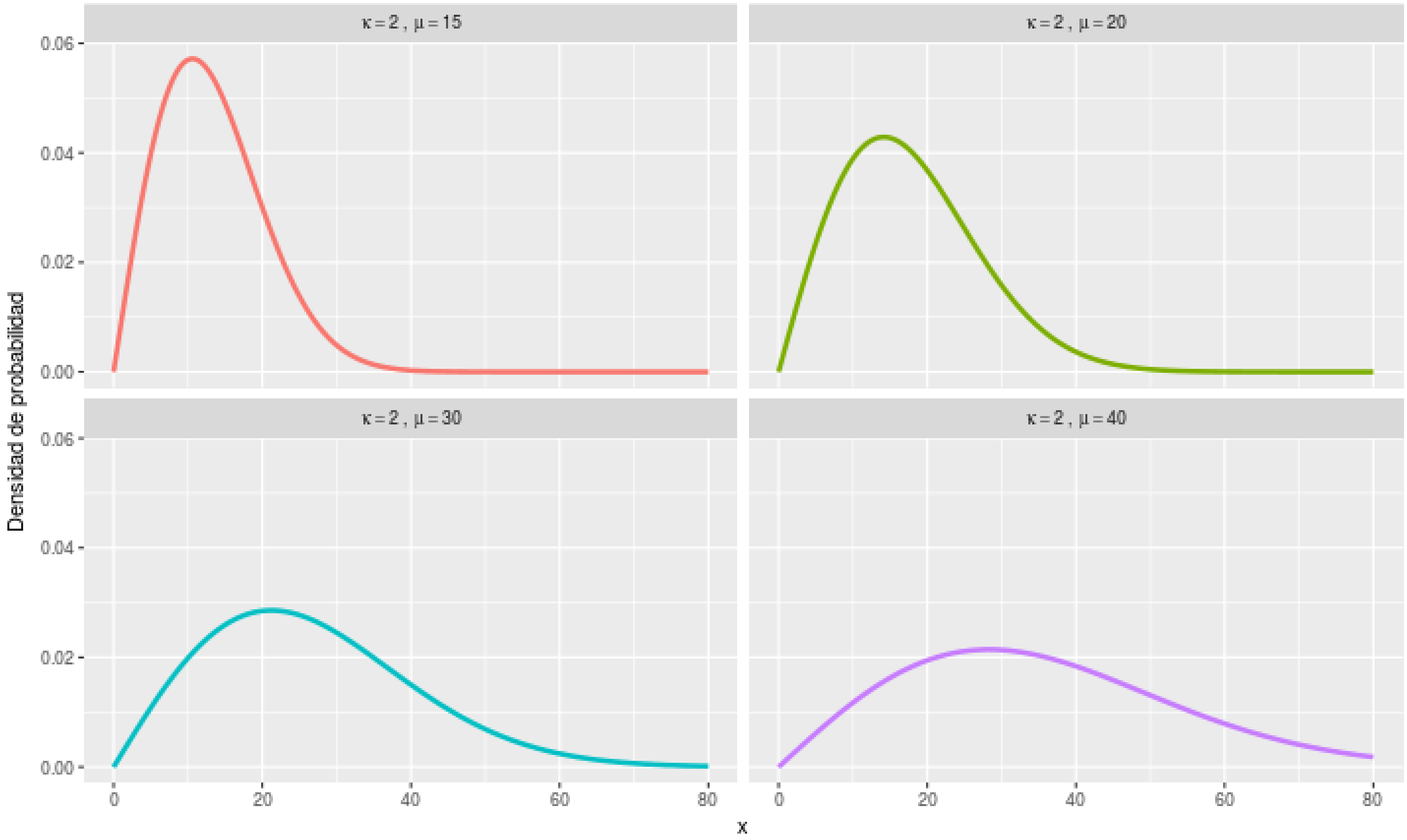
Cuando $\kappa = 1$ la distribución de Weibull coincide con la exponencial de parámetro μ

Distribución de Weibull

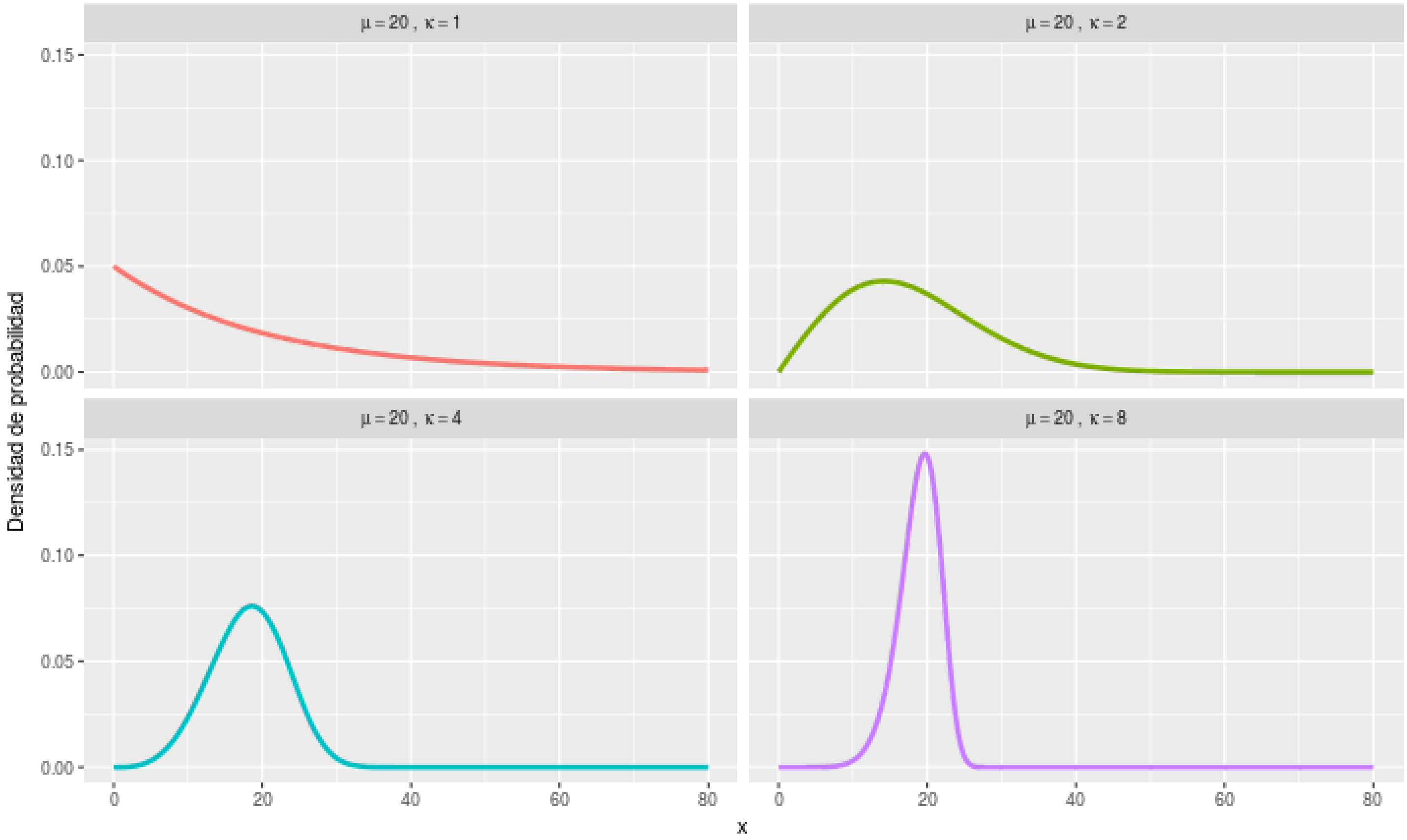
La función de densidad de la distribución de Weibull es:

$$f\left(t\right) = \frac{\kappa}{\mu}\left(\frac{t}{\mu}\right)^{\kappa-1} e^{-\left(t/\mu\right)^{k}},\ \ t \geq 0$$

Representación gráfica de la función de densidad de la distribución de Weibull para $\kappa = 2$ y varios valores de μ



Representación gráfica de la función de densidad de la distribución de Weibull para $\mu = 20$ y varios valores de κ



Distribución de Weibull

Esperanza y Varianza

$$E[X] = \mu\Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)$$

$$Var(X) = \mu^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{\kappa}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\kappa}\right)^2\right]$$

siendo Γ la función gamma de Euler: $\Gamma\left(x\right) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$.

Si n es un número entero $\Gamma(n) = (n-1)!$; si x es real, $\Gamma(x)$ debe aproximarse numéricamente. En octave se calcula mediante gamma(x)

Ejemplo:

Sea X= *tiempo entre llegadas de paquetes a un conmutador* $\approx W(\kappa = 2, \mu = 20)$

(1). ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo paquete llegue en menos de 16 ms?

$$P\left(X \leq 16\right) = F\left(16\right) = 1 - e^{-(16/20)^2} = 0.473$$

(2). ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo paquete tarde más de 10 ms.?

$$P\left(X > 10\right) = 1 - P\left(X \leq 10\right) = 1 - F\left(10\right) = e^{-(10/20)^2} = 0.7788$$

(3). ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo paquete tarde en llegar entre 15 y 30 ms?

$$P\left(15 \leq X \leq 30\right) = \int_{15}^{30} f(x)dx = F(30) - F(15) = 0.4644$$

(4). ¿Cuál es el tiempo medio que transcurre entre la llegada de dos paquetes consecutivos?

$$E[X] = 20\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 20 \cdot 0.8862 = 17.7245\ ms.$$

Distribución uniforme

Distribución uniforme $U[a, b]$

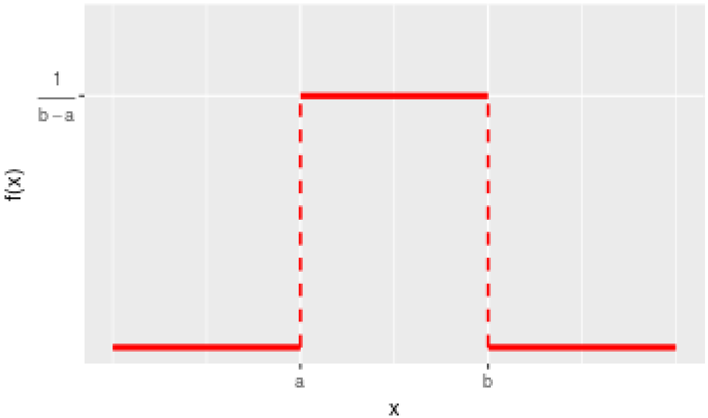
Esta es la distribución de la variable:

X = *"Resultado de elegir un valor al azar en el intervalo* $[a, b]$"

cuando la probabilidad se reparte de manera homogénea (uniforme) sobre el intervalo, esto es, no hay más probabilidad de observar valores en una zona que en otra del mismo.

Su función de densidad es de la forma:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b$$



Ya hemos visto esta distribución en el ejemplo del lugar (aleatorio) donde se avería un coche en una carretera larga y recta.

Distribución uniforme: Función de distribución

$$F(x) = P\left(X \leq x\right) = \frac{x-a}{b-a} \;\; x \in (a,b)$$

Distribución uniforme: Esperanza y varianza

Es fácil comprobar que:

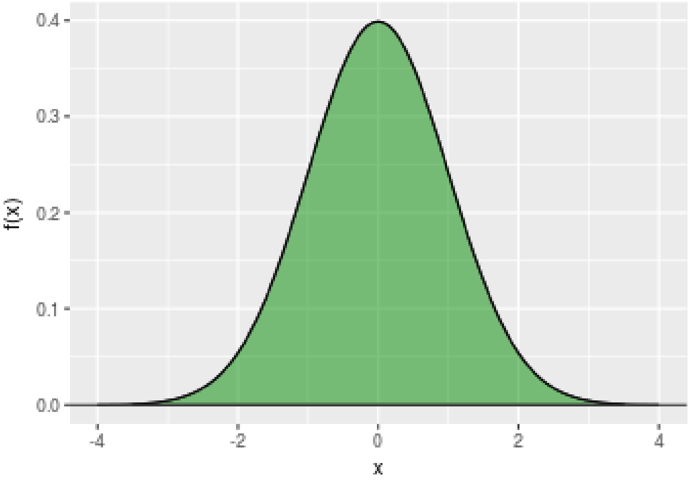
$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribución Normal o de Gauss

Distribución Normal o de Gauss

La distribución normal aparece asociada a variables aleatorias que se comportan de tal manera que lo más probable es observar valores en torno a la media; y a medida que los valores se alejan de la media, bien sea hacia arriba o hacia abajo, van siendo progresivamente más difíciles de observar:



Distribución Normal o de Gauss

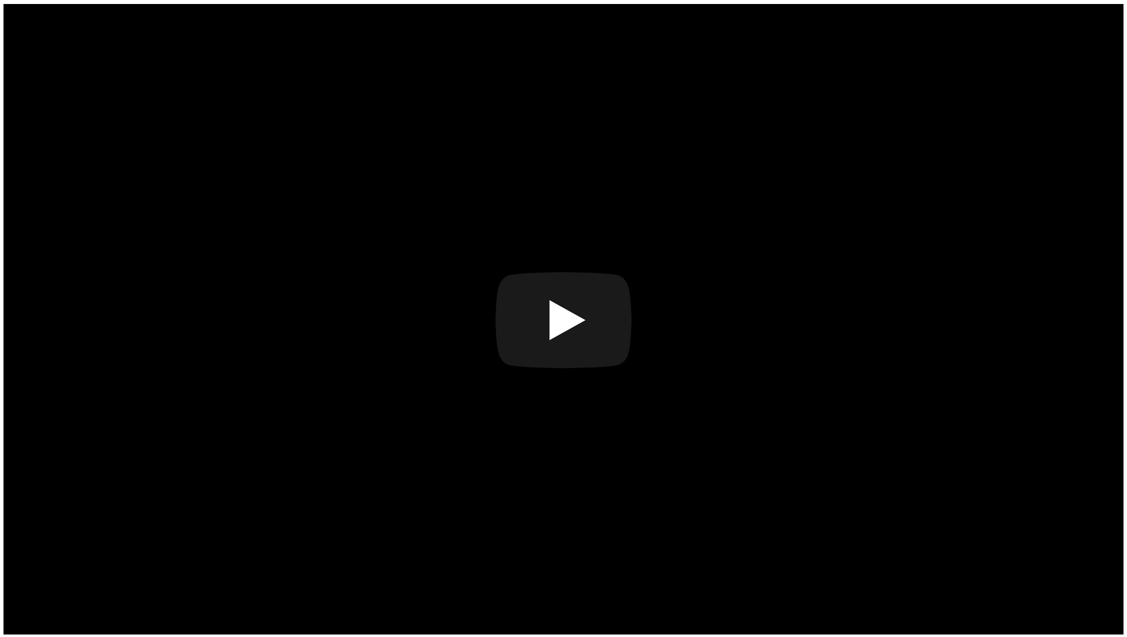
Múltiples ejemplos de variables con esta distribución:

- Errores de Medida.
- Magnitud del ruido superpuesto a una señal.
- Temperatura de un microcircuito en condiciones normales de operación.
- Variables Biológicas: peso, talla, nivel de glucosa en sangre …
- Consumo de energía diario en una ciudad o en una empresa.
- Kilometraje mensual recorrido por un vehículo arbitrario.
- …

¿Por qué es tan ubicua la distribución normal?

Acción del teorema central del límite

Teorema central del límite



De forma intuitiva, el teorema central del límite afirma que dado un conjunto de variables aleatorias independientes, con cualquier distribución de probabilidad y suponiendo que su varianza sea finita, la suma de un número elevado de estas variables tiende a distribuirse de manera similar a una variable normal.

Distribución Normal o de Gauss

Una variable aleatoria X sigue una distribución Normal de parámetros μ (esperanza) y σ (desviación típica) y se denota como $X \approx N(\mu, \sigma)$, si su función de densidad de probabilidad es de la forma:

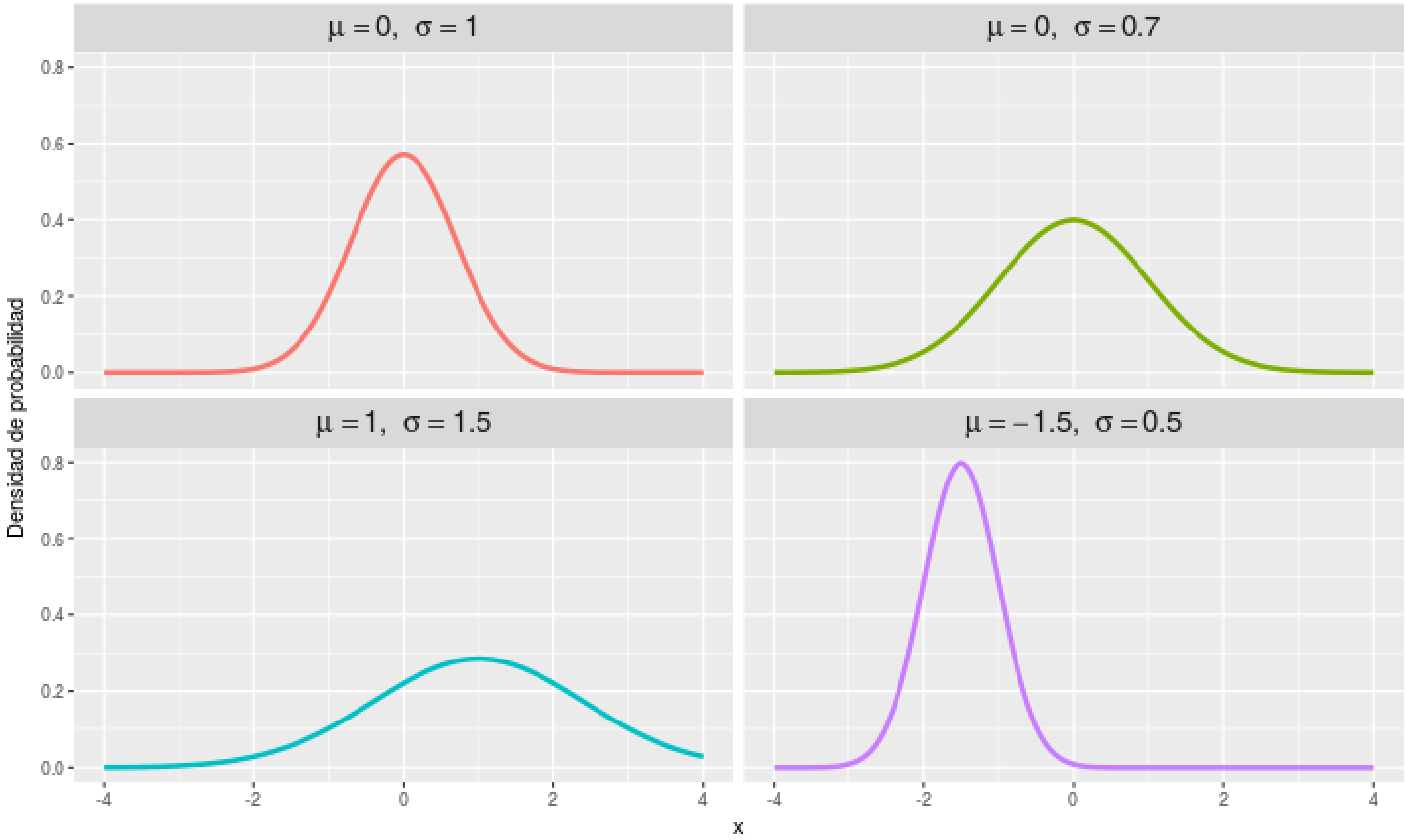
$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Puede comprobarse que:

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f\left(x\right) dx = \mu$$

$$Var\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x-\mu\right)^2 f\left(x\right) dx = \sigma$$

Representación gráfica de la función de densidad de la distribución normal para varios valores de μ y σ



Distribución normal: cálculo de probabilidades.

- La función de densidad de la distribución normal no puede integrarse de manera analítica, sino numérica. De ahí que para calcular probabilidades de la forma $P(X \leq x)$ o $P(a \leq X \leq b)$ haya que recurrir a calculadora, ordenador o tablas de referencia.

- El siguiente resultado permite convertir una variable $N(\mu, \sigma)$ en una $N(0,1)$; de esta forma las probabilidades de la primera pueden calcularse a partir de las probabilidades de la segunda:

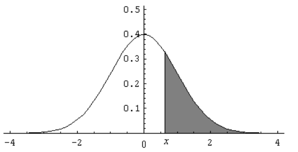
Teorema (de la tipificación): *Si una variable aleatoria X tiene distribución de probabilidad* $N\left(\mu, \sigma\right)$*, entonces,* $Z = \frac{(X-\mu)}{\sigma}$ *tiene distribución de probabilidad* $N\left(0, 1\right)$ *(normal estándar o tipificada). Por tanto:*

$$P\left(X \leq x\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Tabla de la Distribución Normal Estándar $N(0,1)$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45620	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42465
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591
0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10383	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03362	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139
3	0.0013500	0.0013063	0.0012639	0.0012228	0.0011830	0.0011443	0.0011068	0.0010704	0.0010351	0.0010009
3.1	0.0009677	0.0009355	0.0009043	0.0008741	0.0008448	0.0008164	0.0007889	0.0007623	0.0007364	0.0007114
3.2	0.0006872	0.0006637	0.0006410	0.0006190	0.0005977	0.0005771	0.0005571	0.0005378	0.0005191	0.0005010
3.3	0.0004835	0.0004665	0.0004501	0.0004343	0.0004189	0.0004041	0.0003898	0.0003759	0.0003625	0.0003495
3.4	0.0003370	0.0003249	0.0003132	0.0003018	0.0002909	0.0002803	0.0002701	0.0002603	0.0002508	0.0002416
3.5	0.0002327	0.0002241	0.0002158	0.0002078	0.0002001	0.0001927	0.0001855	0.0001785	0.0001718	0.0001654
3.6	0.0001591	0.0001531	0.0001473	0.0001417	0.0001364	0.0001312	0.0001261	0.0001213	0.0001166	0.0001122
3.7	0.0001078	0.0001037	0.0000996	0.0000958	0.0000920	0.0000884	0.0000850	0.0000816	0.0000784	0.0000753
3.8	0.0000724	0.0000695	0.0000667	0.0000641	0.0000615	0.0000591	0.0000567	0.0000544	0.0000522	0.0000501
3.9	0.0000481	0.0000462	0.0000443	0.0000425	0.0000408	0.0000391	0.0000375	0.0000360	0.0000345	0.0000331
4	0.0000317	0.0000304	0.0000291	0.0000279	0.0000267	0.0000256	0.0000245	0.0000235	0.0000225	0.0000216

Tabla de la Distribución Normal Estándar



Dado un valor *x*, esta tabla nos devuelve la probabilidad:

$$P\left(Z > x\right) = 1 - F_Z(x)$$

Distribución normal: uso de la tabla de la *N(0,1)*

- Esta tabla nos permite calcular probabilidades de la forma $P\left(Z>x\right)$ donde Z es una variable aleatoria con distribución $N\left(0,1\right)$ y x es un número de la forma $a.bc=a.b+0.0c$. El valor de dicha probabilidad se encuentra en el cruce de la fila $a.b$ con la columna $0.0c$.

- Ejemplo: para calcular $P\left(Z>1.23\right)$ se busca en el cruce de la fila 1.2 con la columa 0.03, donde se encuentra el valor 0.10935.

- En el caso de que se desee calcular la probabilidad de que Z sea mayor que un número negativo, se puede proceder aprovechando la circunstancia de que la función de densidad de Z es simétrica y por tanto:

$$P\left(Z>-x\right)=P\left(Z<x\right)=1-P(Z>x)$$

- Para calcular la probabilidad de un intervalo:

$$P(a\leq Z\leq b)=P(Z>a)-P(Z>b)$$

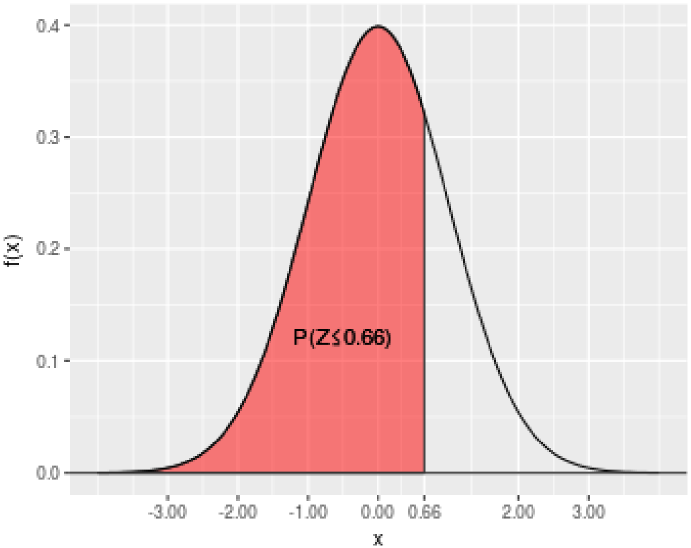
Distribución normal: uso de la tabla de la *N(0,1)*

- Sea $X \approx N(\mu = 8, \sigma = 3)$:

$$P\left(X \leq 10\right) = P\left(Z \leq \frac{10-8}{3}\right) =$$

$$= P\left(Z \leq 0.66\right) = 1 - P\left(Z > 0.66\right)$$

$$= 1 - 0.25463 = 0.74537$$



Distribución normal: uso de la tabla de la *N(0,1)*

- Sea $X \approx N(\mu = 8, \sigma = 3)$:

$$P(X \leq 4) = P\left(Z \leq \frac{4-8}{3}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.33) = P(Z > 1.33) = 0.09176$$