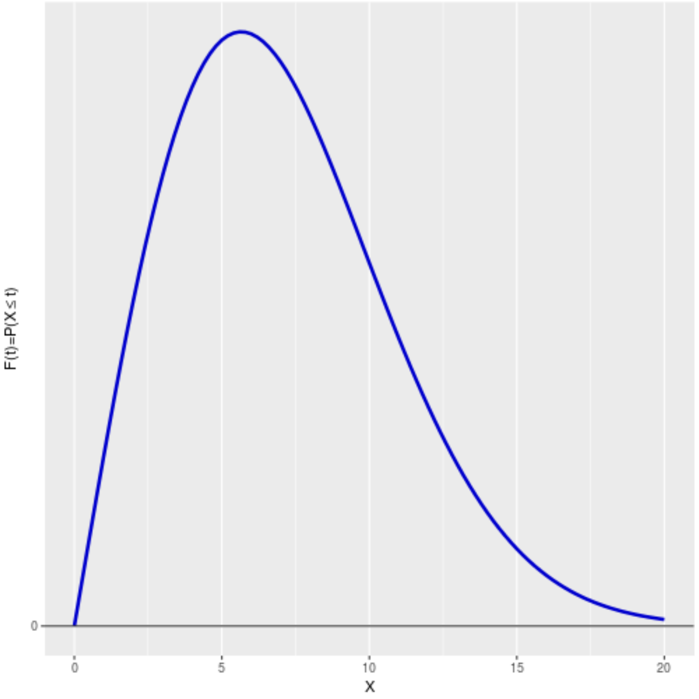
Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 2: Variables Aleatorias

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

5. Características de las distribuciones de probabilidad

Características de las distribuciones de probabilidad

En esta sección describiremos una serie de medidas que tienen como objetivo **resumir** las características principales de la distribución de una variable aleatoria:



- Valor central: esperanza.
- Dispersión: varianza y desviación típica.
- Forma: asimetría y apuntamiento.
- Posición: cuantiles.

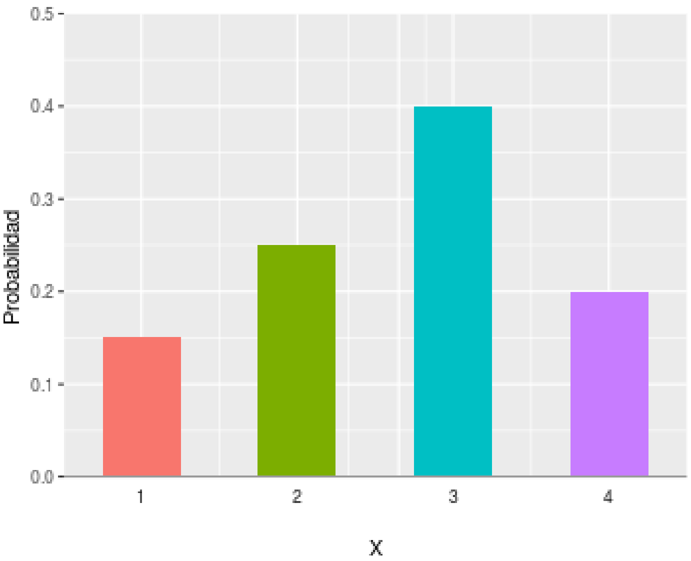
Valor central: Esperanza

Esperanza matemática

Objetivo: Resumir la variable aleatoria X en un valor **central** representativo de la totalidad de su distribución de probabilidad.

Ejemplo:

X	Probabilidad
1	0.15
2	0.25
3	0.40
4	0.20

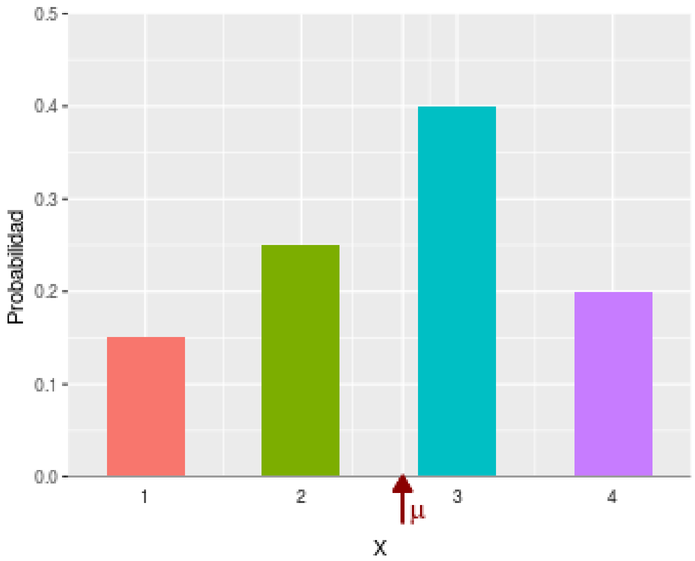


Esperanza matemática

Objetivo: Resumir la variable aleatoria X en un valor **central** representativo de la totalidad de su distribución de probabilidad.

Ejemplo:

X	Probabilidad
1	0.15
2	0.25
3	0.40
4	0.20



Usando la analogía entre probabilidad y masa, la **esperanza** $\mu = E[X]$ de una variable aleatoria se corresponde con el **centro de gravedad** de su distribución de probabilidad:

$$E[X] = 1 \cdot 0.15 + 2 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 = 2.65$$

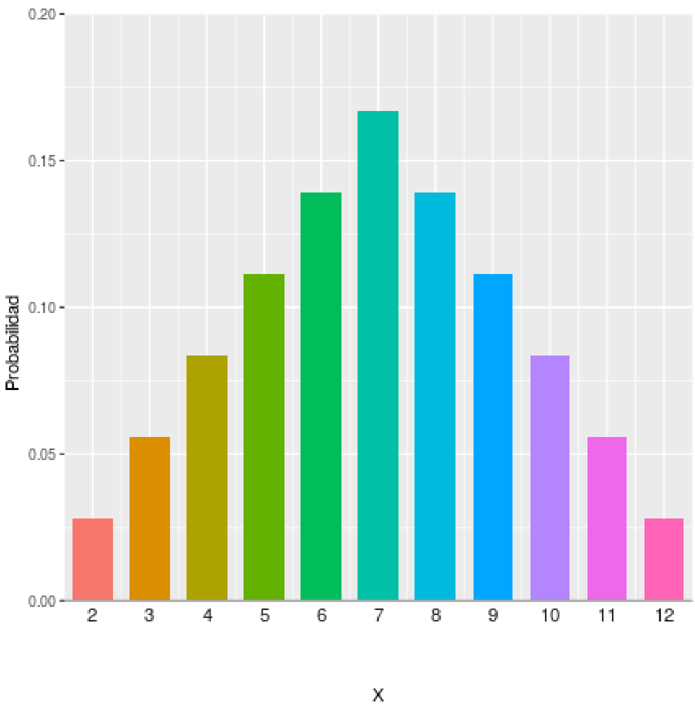
Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria **discreta**. Se define la esperanza de X como:

$$E\left[X\right] = \sum_t t \cdot \Pr\left(X = t\right)$$

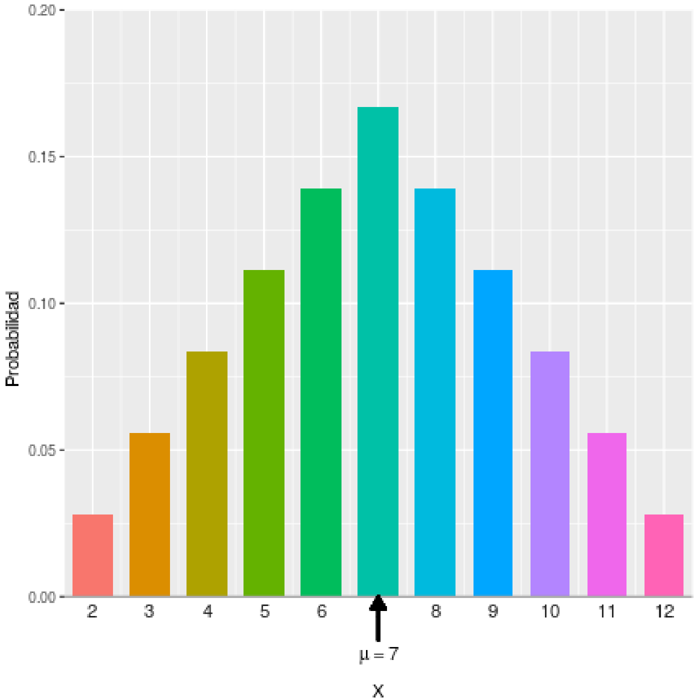
Ejemplo: suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado

X	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



Ejemplo: suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado

X	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36



$$E[X] = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} +$$

$$+7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7$$

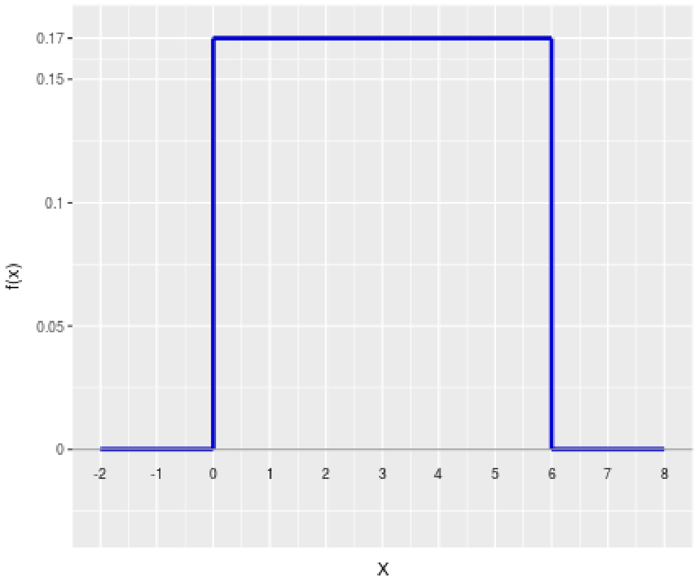
Esperanza matemática

Sea X una variable aleatoria **continua**. Se define la esperanza de X como:

$$E\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} t f\left(t\right) dt$$

Ejemplo

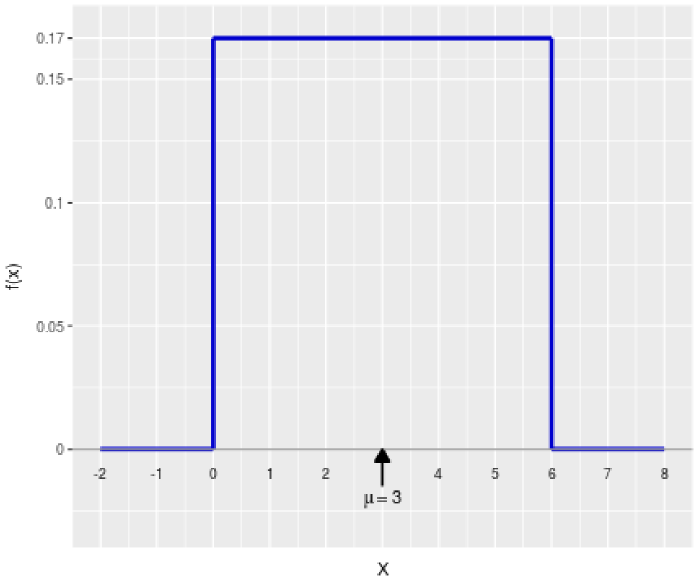
- El **lugar** en una carretera en que se produce la avería de un coche.



$$f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$$

Ejemplo

- El **lugar** en una carretera en que se produce la avería de un coche.



$$f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$E[X] = \int_0^6 t\frac{1}{6}dt = \left.\frac{t^2}{2\cdot 6}\right]_0^6 = \frac{6^2}{2\cdot 6} = 3$$

Esperanza Matemática

Sea X una variable aleatoria y consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La esperanza matemática de la variable aleatoria $\mathrm{g}\left(\mathrm{X}\right)$ se define como:

- Si X es discreta:

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \sum\nolimits_t g\left(t\right) \cdot \Pr\left(X = t\right)$$

- Si X es continua y tiene función de densidad $f\left(t\right)$

$$E\left[g\left(X\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(t\right) \cdot f\left(t\right) \cdot dt$$

Ejemplo:

Una empresa de software ha desarrollado un programa para generar fondos de pantalla animados. Uno de los modelos de fondo consiste en la generación de círculos de radio y color aleatorios que se van moviendo al azar por la pantalla. El radio X de cada círculo es una variable aleatoria que toma valores entre 1 y 5 cm con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x (1-x)(x-5) & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1. Calcula la probabilidad de que el programa genere un círculo de radio mayor que 3 cm.

2. Calcula $E[X]$ (valor esperado del radio de un círculo generado al azar por el programa)

3. Calcula el valor esperado de la superficie de un círculo generado al azar por el programa

Ejemplo:

En primer lugar hemos de calcular el valor de λ de tal forma que la probabilidad total de que el radio de un círculo elegido al azar esté entre 1 y 5 cm. sea 1:

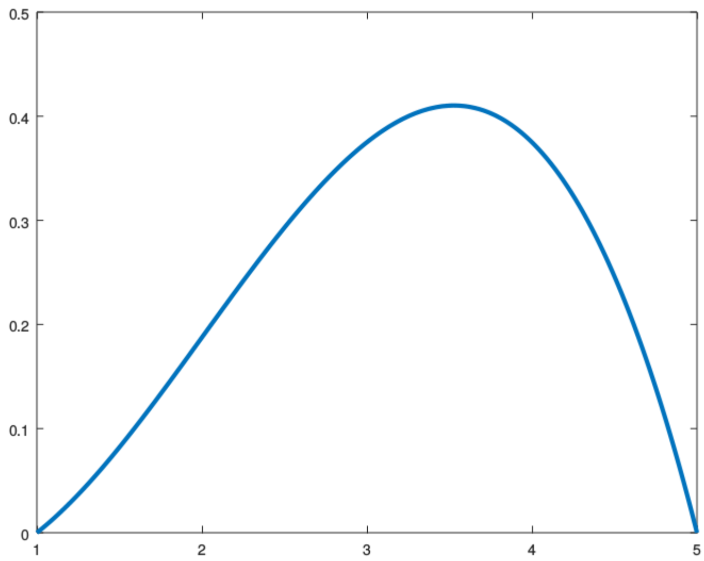
$$\int_1^5 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^5 \lambda x\,(1-x)\,(x-5)\,dx = 1 \Rightarrow \lambda \int_1^5 \left(-x^3 + 6x^2 - 5x\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow \lambda \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_1^5 = 1 \Rightarrow \lambda \left[\frac{375}{12} - \left(-\frac{9}{12}\right)\right] = 1 \Rightarrow \lambda \cdot 32 = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{32}$$

Ejemplo:

Podemos utilizar octave/matlab para dibujar la función de densidad:

```
x=1:0.01:5
plot(x,(1/32).*x.*(1-x).*(x-5), "linewidth",3)
```



Ejemplo:

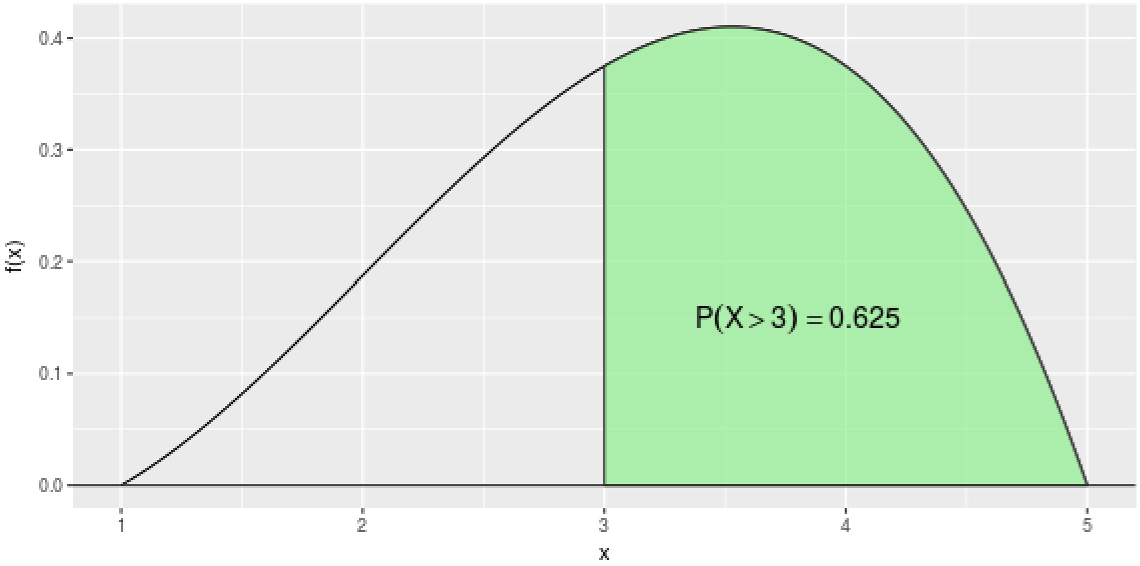
1. Calcula la probabilidad de que el programa genere un círculo de radio mayor que 3 cm.

$$P\left(X>3\right)=P\left(3\leq X\leq 5\right)=\int_{3}^{5}\frac{1}{32}x\left(1-x\right)\left(x-5\right)dx=$$

$$=\frac{1}{32}\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{6x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}\right]_3^5=\frac{1}{32}\left[\frac{375}{12}-\frac{135}{12}\right]=\frac{20}{32}=\frac{5}{8}=0.625$$

Ejemplo:

Gráficamente:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} x (1-x)(x-5) & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

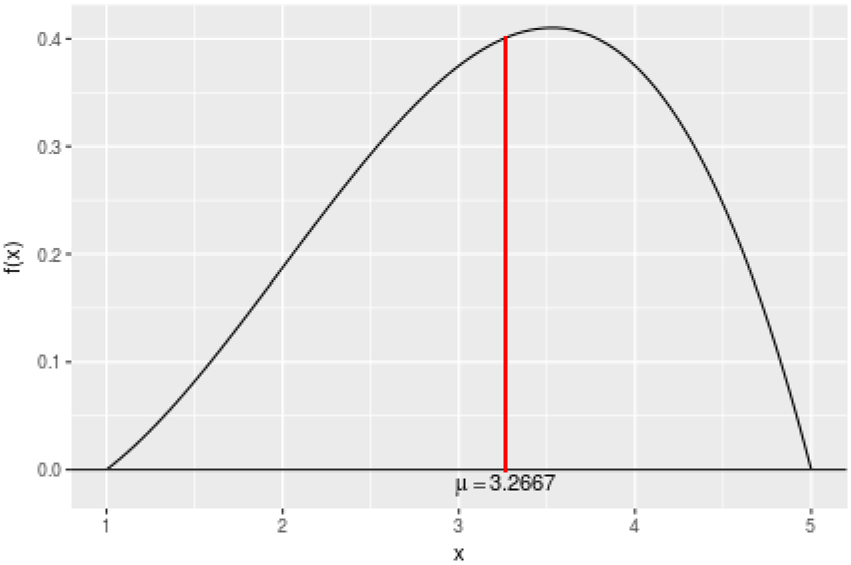
Ejemplo:

2. Calcula $E[X]$ (valor esperado del radio de un círculo generado al azar por el programa)

Se tiene:

$$E\left[X\right] = \int_1^5 xf\left(x\right)dx = \int_1^5 \frac{1}{32}x^2\left(1-x\right)\left(x-5\right)dx = \frac{1}{32}\int_1^5 \left(-x^4+6x^3-5x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{32}\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{6x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}\right]_1^5 = \frac{49}{15} = 3.26667\ cm$$



Ejemplo:

3. Calcula el valor esperado de la superficie de un círculo generado al azar por el programa

La superficie de un círculo de radio r es $Sup(r) = \pi r^2$; por tanto, como el radio es aleatorio, la superficie será también un valor aleatorio función del valor del radio; la superficie esperada del círculo es entonces:

$$E\left[Sup(X)\right] = \int_1^5 \pi x^2 f\left(x\right) dx = \int_1^5 \frac{\pi}{32} x^3 \left(1-x\right)\left(x-5\right) dx = \frac{\pi}{32} \int_1^5 \left(-x^5 + 6x^4 - 5x^3\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{32}\left[-\frac{x^6}{6} + \frac{6x^5}{5} - \frac{5x^4}{4}\right]_1^5 = 35.81416\ cm^2$$

Primera propiedad de linealidad de la esperanza

Sea λ una constante y X una variable aleatoria. Entonces

$$E\left[\lambda \cdot X\right] = \lambda \cdot E\left[X\right]$$

Demostración. (caso discreto)

$$E\left[\lambda X\right] = \sum_t \lambda t \cdot \Pr\left(X = t\right) = \lambda \sum_t t \cdot \Pr\left(X = t\right) = \lambda E\left[X\right]$$

Demostración. (caso continuo)

$$E\left[\lambda X\right] = \int_t \lambda t \cdot f\left(t\right) = \lambda \int_t t \cdot f\left(t\right) = \lambda E\left[X\right]$$

Dispersion: Varianza y Desviación típica

Dispersión de variables aleatorias (Varianza)

Para una variable aleatoria X con esperanza μ, la varianza σ^2 se define como:

$$\sigma^2 = \mathrm{var}\left(X\right) = E\left[\left(X - \mu\right)^2\right]$$

```
##
## Attaching package: 'tidyr'

## The following object is masked from 'package:magrittr':
##
##     extract
```

Dispersión de variables aleatorias (Varianza)

Para una variable aleatoria X con esperanza μ, la varianza σ^2 se define como:

$$\sigma^2 = \mathrm{var}\left(X\right) = E\left[\left(X - \mu\right)^2\right]$$

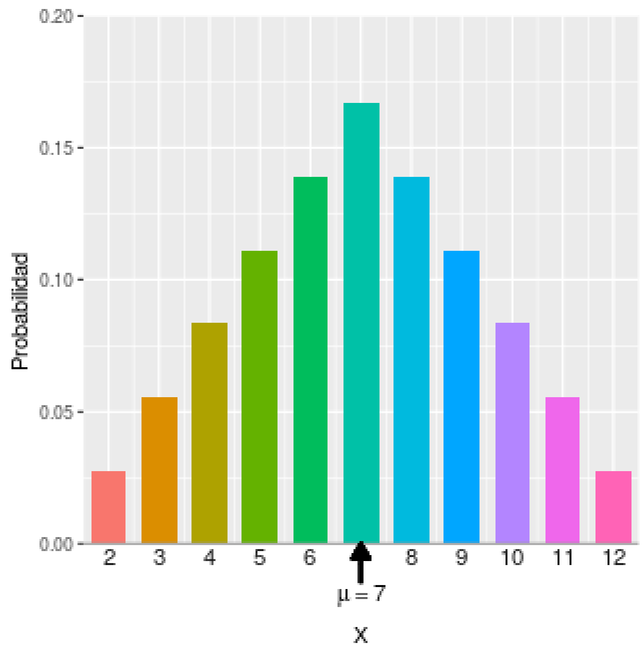
Por tanto:

- Cuanto mayor sea la varianza **más dispersos** (alejados del centro de gravedad o esperanza) se encuentran los valores que puede tomar la variable aleatoria.

- Una menor varianza supone una **mayor concentración** de la distribución alrededor de su centro de gravedad.

Ejemplo: suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado

X	Probabilidad
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

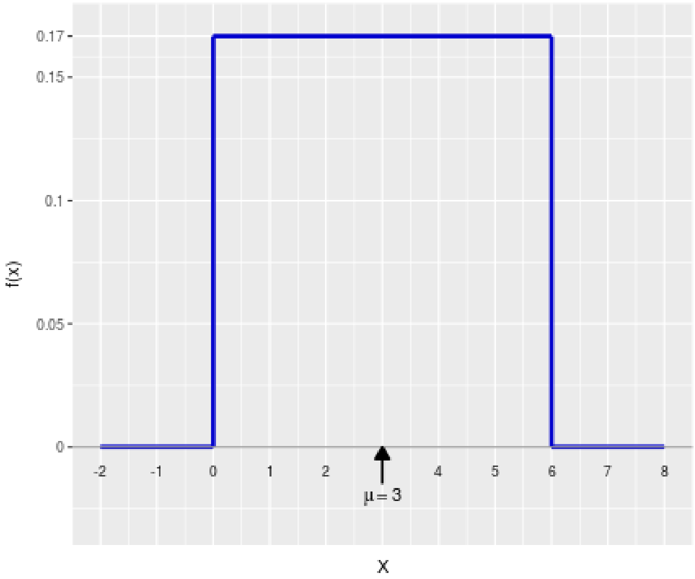


$$Var\left(X\right)=E\left[\left(X-\mu\right)^2\right]=\sum_{k=2}^{12}\left(x-\mu\right)^2P\left(X=x\right)=$$

$$=\left(2-7\right)^2\frac{1}{36}+\left(3-7\right)^2\frac{2}{36}+\left(4-7\right)^2\frac{3}{36}+\left(5-7\right)^2\frac{4}{36}+\left(6-7\right)^2\frac{5}{36}+\left(7-7\right)^2\frac{6}{36}+$$

$$+\left(8-7\right)^2\frac{5}{36}+\left(9-7\right)^2\frac{4}{36}+\left(10-7\right)^2\frac{3}{36}+\left(11-7\right)^2\frac{2}{36}+\left(12-7\right)^2\frac{1}{36}=5.833$$

Ejemplo: Lugar de una carretera en que se produce la avería de un coche.



$$f(x) = \frac{1}{6} \quad 0 \leq x \leq 6$$

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_0^6 (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_0^6 (x-3)^2 \frac{1}{6} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^6 = \frac{1}{6}\left[\frac{(6-3)^3}{3} - \frac{(0-3)^3}{3}\right] = \frac{1}{6}\left(3^2+3^2\right) = 3$$

Ejemplo: Cálculo de esperanzas y varianzas con octave/matlab

- El siguiente código en octave/matlab permite calcular la esperanza y la varianza en el problema del lanzamiento de dos dados; para ello simplemente definimos los valores de X y las probabilidades p y utilizamos el producto escalar:

```
x=2:1:12
p=[1,2,3,4,5,6,5,4,3,2,1]/36
mu=x*p'
var=((x-mu).^ 2)*p'
```

- Asimismo, para calcular la esperanza y varianza en el problema de la carretera, definimos la función de densidad y utilizamos la función quad que permite el cálculo de integrales definidas:

```
function y=f(x)
  y=(1/6);
endfunction
mu=quad(@(x) x.*f(x),0,6)
var=quad(@(x) ((x-mu).^2).*f(x),0,6)
```

Desviación Típica

La desviación típica se define como:

$$\sigma = \mathrm{sd}\left(X\right) = \sqrt{\mathrm{var}\left(X\right)}$$

Como medida de dispersión, σ tiene la ventaja de que se mide en la misma escala (mismas unidades de medida) que la variable X.

Interpretación de la Varianza: Desigualdad de Chebyshev

Pafnuty Chebyshev (1821-1894)

$$P\left(|X-\mu| \leq k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Esta desigualdad indica que la probabilidad de que la variable X tome valores entre su esperanza μ y k veces su desviación típica σ es al menos $1 - 1/k^2$. En particular:

$$P\left(|X-\mu| \leq 2\sigma\right) \geq 0.75$$

$$P\left(|X-\mu| \leq 3\sigma\right) \geq 0.8889$$

$$P\left(|X-\mu| \leq 4\sigma\right) \geq 0.9375$$

Así, conocidas μ y σ esta desigualdad nos da una idea del rango en que se mueven los valores más probables de la variable aleatoria X.

Demostración de la desigualdad de Chebyshev

Propiedades de la Varianza

$$\text{var}\left(\lambda X\right) = \lambda^2 \text{var}\left(X\right)$$

Demostración: Llamando $\mu = E\left[X\right]$, por la propiedad de linealidad de la esperanza, se tiene que $E\left[\lambda X\right] = \lambda\mu$. Utilizando entonces la definición de varianza:

$$\text{var}\left(\lambda X\right) = E\left[(\lambda X - E[\lambda X])^2\right] = E\left[(\lambda X - \lambda\mu)^2\right] =$$

$$= E\left[\lambda^2 (X - \mu)^2\right] = \lambda^2 E\left[(X - \mu)^2\right] =$$

$$= \lambda^2 \text{var}\left(X\right)$$

Propiedades de la Varianza

$$\operatorname{var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Demostración:

$$\operatorname{var}(X) = E\left[(X-\mu)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

- En el caso discreto:

$$E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] = \sum_x \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) P(X = x) =$$

$$= \sum_x x^2 P(X = x) - 2\mu \sum_x x P(X = x) + \mu^2 \sum_x P(X = x) =$$

$$E\left[X^2\right] - 2\mu^2 + \mu^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

Propiedades de la Varianza

$$\text{var}\left(X\right) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Demostración:

$$\text{var}\left(X\right) = E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] = E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right]$$

- En el caso continuo:

$$E\left[X^2 - 2\mu X + \mu^2\right] = \int_x \left(x^2 - 2\mu x + \mu^2\right) f\left(x\right) dx =$$

$$= \int_x x^2 f\left(x\right) dx - 2\mu \int_x x f\left(x\right) dx + \mu^2 \int_x f\left(x\right) dx$$

$$= E\left[X^2\right] - 2\mu E\left[X\right] + \mu^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2$$

Ejemplo:

Recordemos que en el problema del programa generador de círculos de radio aleatorio, el radio X de cada círculo es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32} x(1-x)(x-5) & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces:

$$E\left[X^2\right] = \int_1^5 x^2 f(x)\, dx = \int_1^5 \frac{1}{32} x^3 (1-x)(x-5)\, dx = \frac{1}{32} \int_1^5 \left(-x^5 + 6x^4 - 5x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{32}\left[-\frac{x^6}{6} + \frac{6x^5}{5} - \frac{5x^4}{4}\right]_1^5 = \frac{1}{32}\left[5^4\left(-\frac{5^2}{6} + 6 - \frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{1}{6} + \frac{6}{5} - \frac{5}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{32}\left[5^4\left(\frac{-250+360-75}{60}\right) - \left(\frac{-10+72-75}{60}\right)\right] = \frac{21888}{32 \cdot 60} = \frac{684}{60} = \frac{57}{5} = 11.4$$

Por tanto:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{57}{5} - \left(\frac{49}{15}\right)^2 = \frac{45 \cdot 57 - 49^2}{225} = \frac{164}{225} = 0.7289$$

Ejemplo:

El cálculo anterior puede llevarse a cabo fácilmente utilizando octave/matlab:

```
function y=f(x)
  y=(1/32).*x.*(1-x).*(x-5);
endfunction
mu=quad(@(x) x.*f(x),1,5)
var=quad(@(x) ((x-mu).^2).*f(x),1,5)
```

Forma: Asimetría y Apuntamiento

Momentos

Sea X una variable aleatoria. Se define el momento de orden k respecto al origen (o simplemente **momento de orden k**) como:

$$\mu_k = E\left[X^k\right]$$

Asimismo, si la esperanza de X es $E[X] = \mu$, se define el momento de orden k respecto a la esperanza (o simplemente **momento central de orden k**) como:

$$M_k = E\left[(X - \mu)^k\right]$$

La varianza se puede expresar alternativamente como:

$$\operatorname{var}(X) = M_2 = \mu_2 - \mu_1^2$$

Los momentos de la distribución de una variable aleatoria dan información sobre la **forma** de dicha distribución

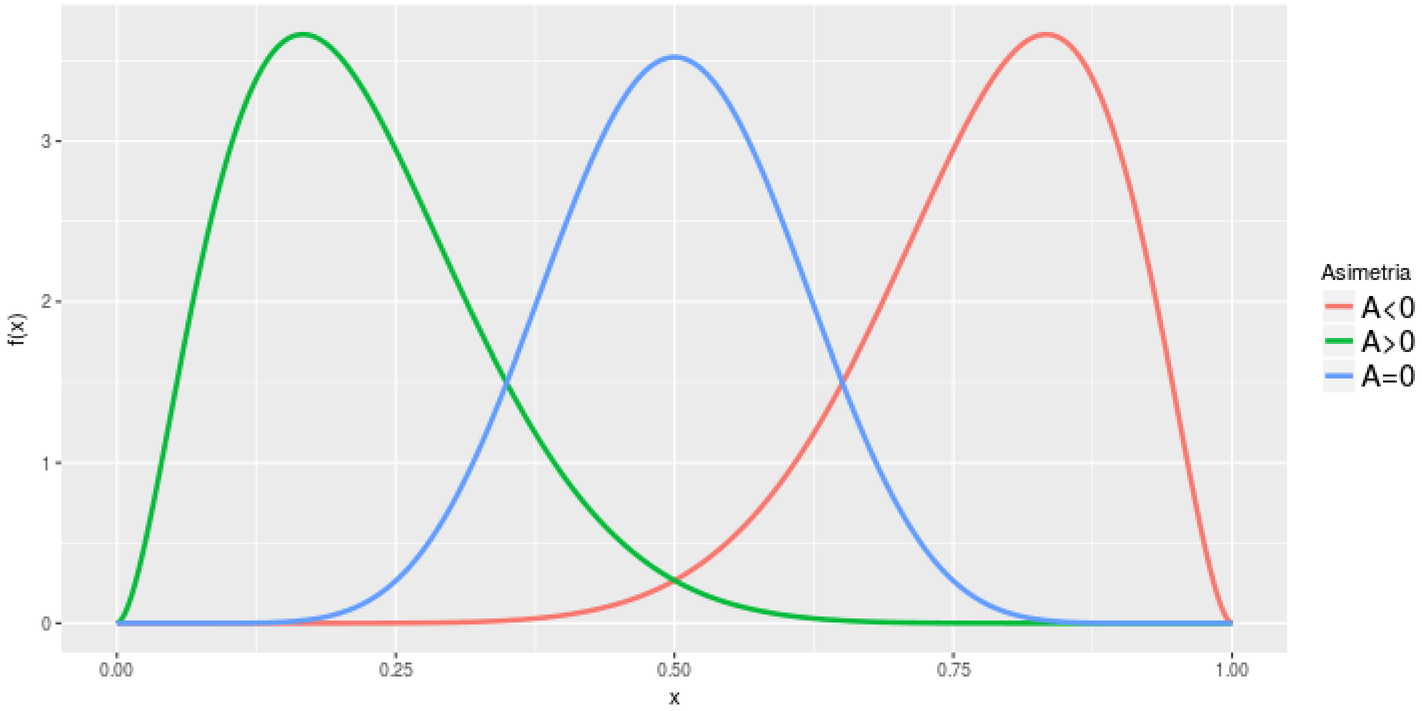
Momento central de orden 3: Asimetría

El momento M_3 informa sobre la asimetría. Concretamente, se define el **coeficiente de asimetría** de la variable aleatoria X como:

$$A = \frac{1}{\sigma^3} E\left[(X-\mu)^3\right]$$

- **A<0 (Asimetría negativa):** la masa de probabilidad tiende a concentrarse a la derecha.
- **A>0 (Asimetría positiva):** la masa de probabilidad tiende a concentrarse a la izquierda.
- **A=0 (Simetría):** La masa de probabilidad se reparte simétricamente respecto a su centro (la esperanza).

Momento central de orden 3: Asimetría



Funciones de densidad correspondientes a variables aleatorias con distintos grados de asimetría.

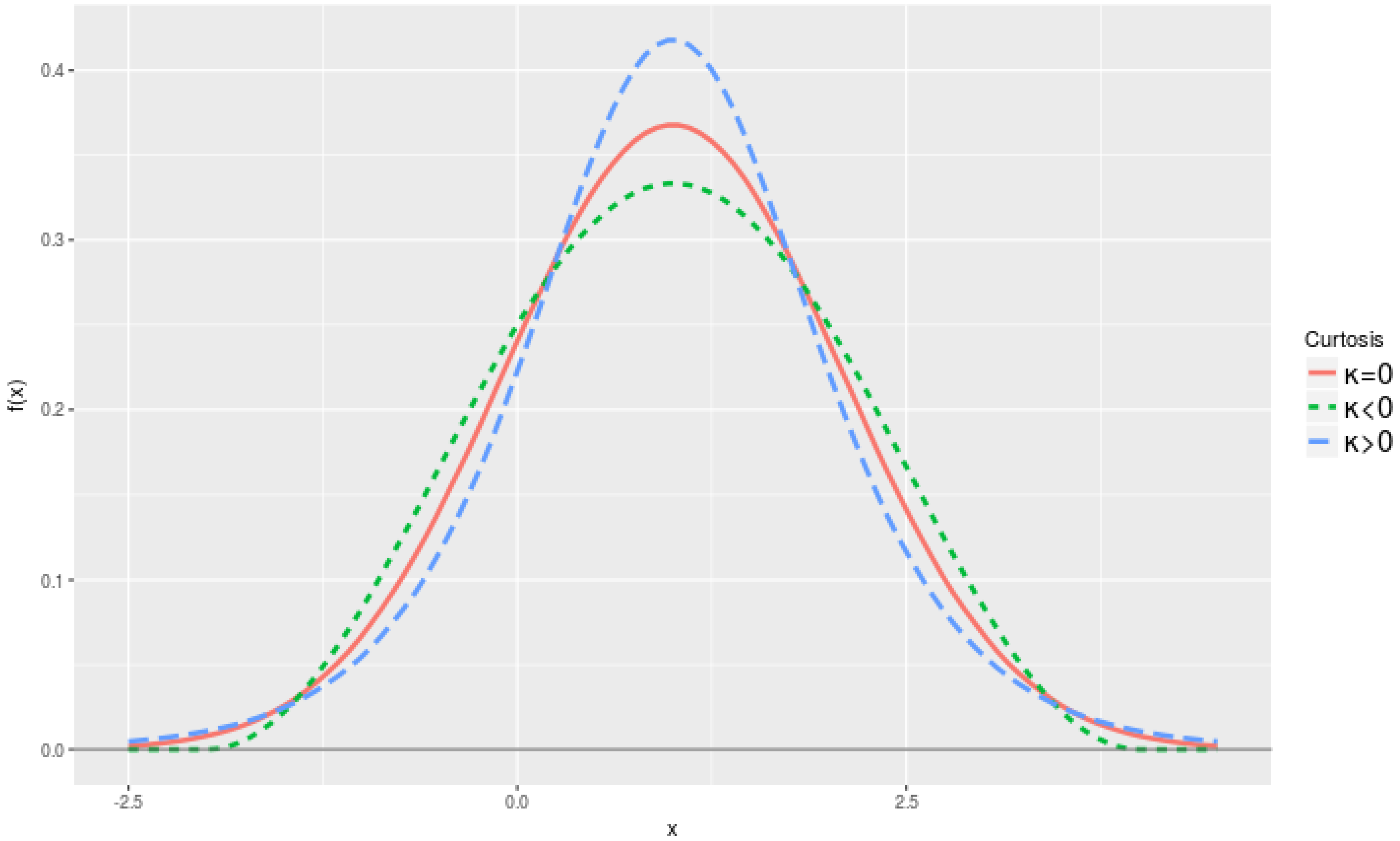
Momento central de orden 4: Apuntamiento o curtosis

El momento M_4 informa sobre el apuntamiento (kurtosis) de la distribución. Concretamente, se define el **coeficiente de curtosis** como:

$$\kappa = \frac{1}{\sigma^4} E\left[(X-\mu)^4\right] - 3$$

- $\kappa < 0$ **(Curtosis negativa):** corresponde a funciones de densidad más bien aplanadas y con colas cortas. Las curvas con esta forma reciben el nombre de *platicúrticas*.
- $\kappa > 0$ **(Curtosis positiva):** corresponde a funciones de densidad más bien "puntiagudas" y con colas largas. Las curvas con esta forma se llaman *leptocúrticas*.
- $\kappa = 0$ **(Curtosis nula):** corresponde al caso intermedio, con un pico redondeado y colas de tamaño intermedio, como ocurre con la curva en forma de campana. Las curvas de este tipo reciben el nombre de *mesocúrticas*.

Momento central de orden 4: Apuntamiento o curtosis



Funciones de densidad de tres variables aleatorias con distintos grados de apuntamiento. Las tres variables tienen distribución simétrica y las mismas esperanza y varianza.

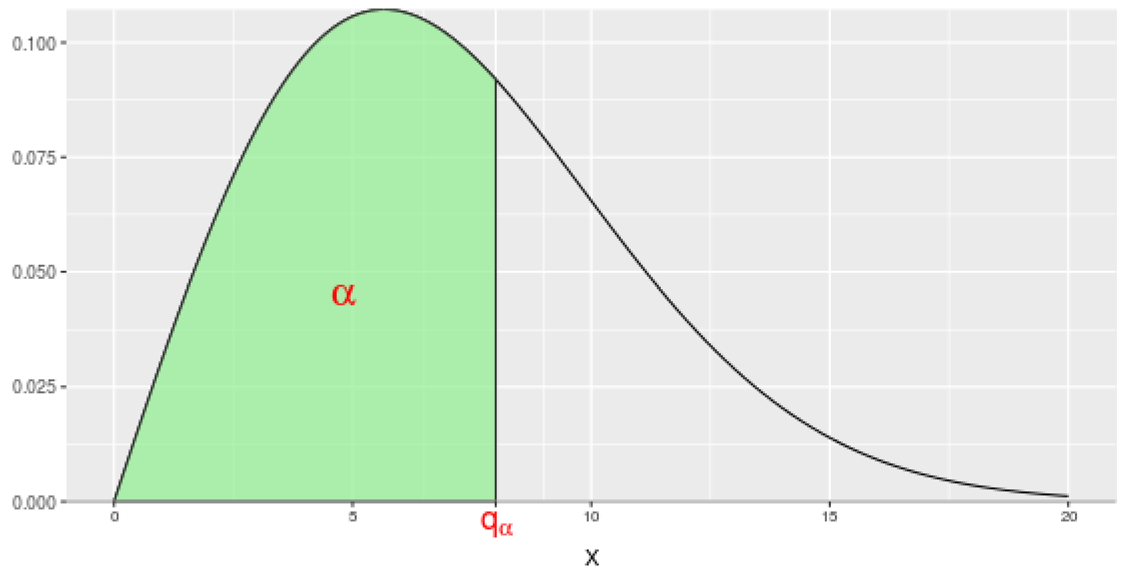
Posición: Cuantiles

Cuantiles

El α-ésimo cuantil de una variable aleatoria X es el valor q_α que verifica:

$$F(q_\alpha) = P(X \leq q_\alpha) = \alpha$$

siempre y cuando esta ecuación tenga solución.



Cuantiles

Algunos cuantiles de uso muy extendido son los siguientes:

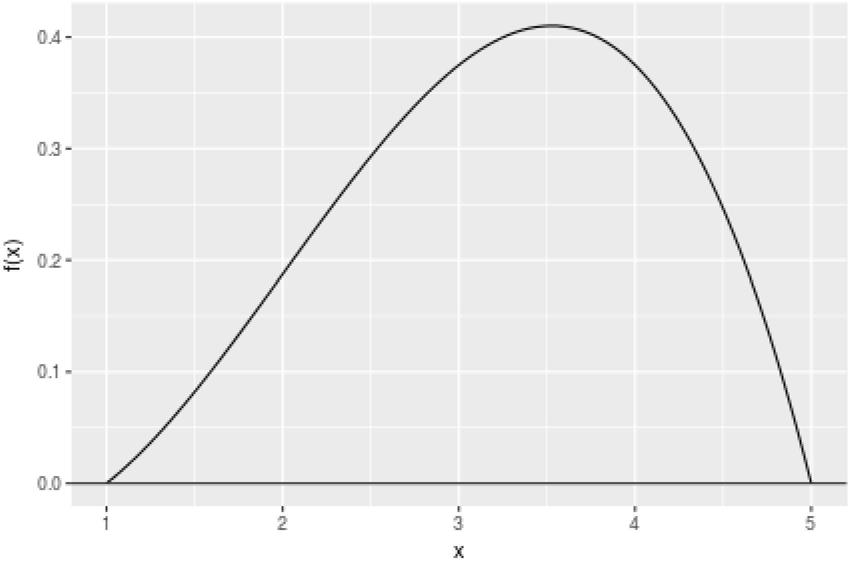
- $q_{0.5}$: se denomina **mediana** de la distribución de probabilidad.
- $q_{0.25}$: **Primer cuartil**
- $q_{0.75}$: **Tercer cuartil**
- $q_{0.01}, q_{0.02}, q_{0.03}, \ldots, q_{0.98}, q_{0.99}$ son los **percentiles** de la distribución

Ejemplo:

En el ejemplo de los círculos de radio aleatorios generados por un programa informático de acuerdo con la función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{32}x(1-x)(x-5) & 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

determinar la mediana, y el primer y tercer cuartiles.



Ejemplo:

Para hallar el cuantil q_α de esta distribución debemos resolver la ecuación:

$$\int_1^{q_\alpha} f(x)\,dx = \alpha$$

$$\int_1^{q_\alpha} \frac{1}{32} x(1-x)(x-5)\,dx = \alpha$$

$$\frac{1}{32}\left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{5x^2}{2}\right]_1^{q\alpha} = \alpha$$

$$\frac{1}{32}\left(\left[-\frac{q_\alpha^4}{4} + 2q_\alpha^3 - \frac{5q_\alpha^2}{2}\right] - \left[-\frac{1}{4} + 2 - \frac{5}{2}\right]\right) = \alpha$$

$$\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\left[-q_\alpha^4 + 8q_\alpha^3 - 10q_\alpha^2\right] - \frac{1}{4}\left[-1 + 8 - 10\right]\right) = \alpha$$

$$-q_\alpha^4 + 8q_\alpha^3 - 10q_\alpha^2 - (-1 + 8 - 10) = 128\alpha$$

$$-q_\alpha^4 + 8q_\alpha^3 - 10q_\alpha^2 + 3 - 128\alpha = 0$$

Ejemplo:

La mediana es el valor que deja a su izquierda una probabilidad $\alpha = 0.5$. En este caso la ecuación anterior se convierte en:

$$-q^4 + 8q^3 - 10q^2 - 61 = 0$$

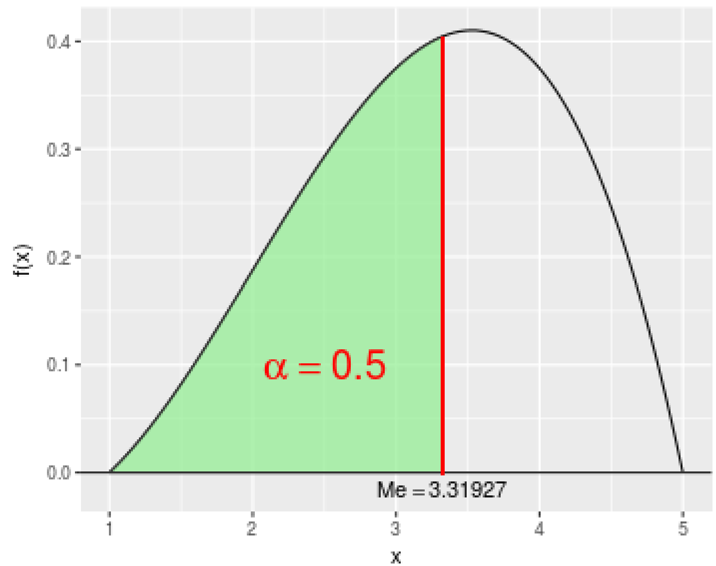
La mediana es la raíz de este polinomio entre 1 y 5. Utilizando octave/matlab la raíz es Me=3.31927 (la única en el intervalo [1,5]):

```
>> p=[-1 8 -10 0 -61]
p =

   -1    8  -10    0  -61

>> roots(p)
ans =

   6.08647 + 0.00000i
   3.31927 + 0.00000i
  -0.70287 + 1.58914i
  -0.70287 - 1.58914i
```



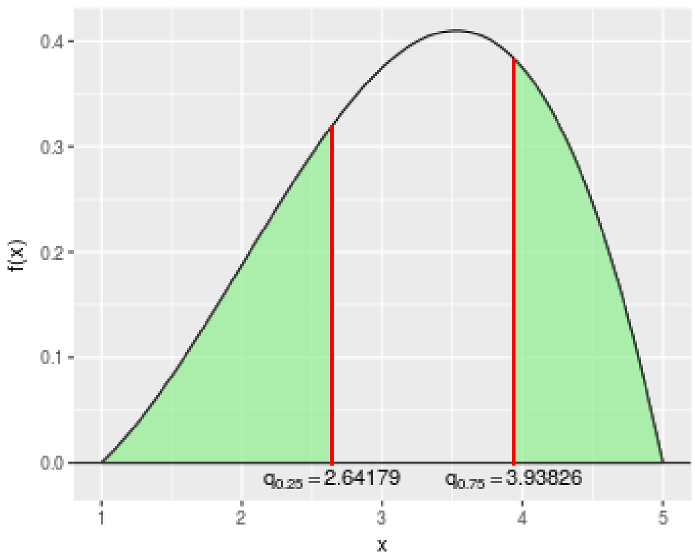
Ejemplo: Cuartiles 1 y 3

Cuartil 1: $\alpha = 0.25$

$$-q^4 + 8q^3 - 10q^2 - 29 = 0$$

Cuartil 3: $\alpha = 0.75$

$$-q^4 + 8q^3 - 10q^2 - 93 = 0$$




```
>> p=[-1 8 -10 0 -29]
p =

   -1     8   -10     0   -29

>> roots(p)
ans =

   6.29526 + 0.00000i
   2.64179 + 0.00000i
  -0.46853 + 1.23460i
  -0.46853 - 1.23460i

>> p=[-1 8 -10 0 -93]
p =

   -1     8   -10     0   -93

>> roots(p)
ans =

   5.79827 + 0.00000i
   3.93826 + 0.00000i
  -0.86826 + 1.82176i
  -0.86826 - 1.82176i
```