Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 2: Variables Aleatorias

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

1. Variables Aleatorias

Variables Aleatorias

Llamamos **variable aleatoria** a cualquier magnitud X cuyos valores son números reales que dependen del azar.

Ejemplos

- La **duración** de una lámpara.
- El **número de mensajes** de WhatsApp que recibe una persona en un día arbitrario.
- El **tiempo entre llegadas** de dos paquetes de datos consecutivos a un router.
- La **suma de valores** obtenidos en dos tiradas sucesivas de un dado.
- El **valor en un instante** t de una señal $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ cuya *fase* φ es aleatoria.

Variables Aleatorias

Formalmente, dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, una **variable aleatoria** X es cualquier función de la forma:

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \omega \in \Omega \quad &\hookrightarrow \quad X(\omega) = r \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

esto es, una función que a los elementos del azar les asigna números reales.

Ejemplo

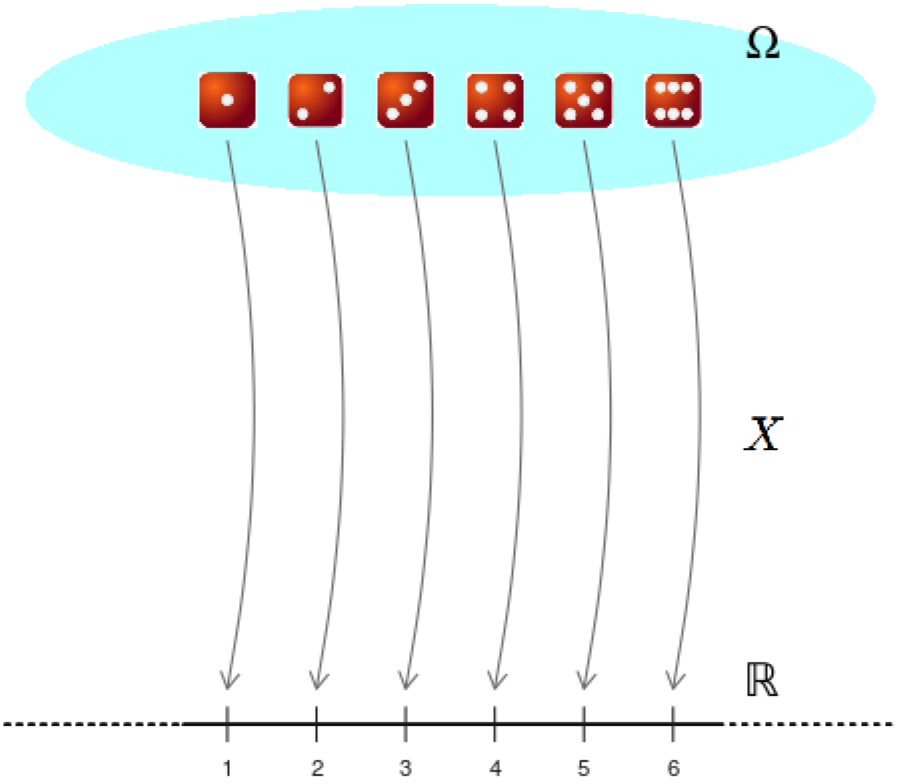
Si observamos el resultado del lanzamiento de un dado tenemos que:

$\Omega = \{$ ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ $\}$

$X($ ⚀ $) = 1 \qquad X($ ⚁ $) = 2 \qquad X($ ⚂ $) = 3$

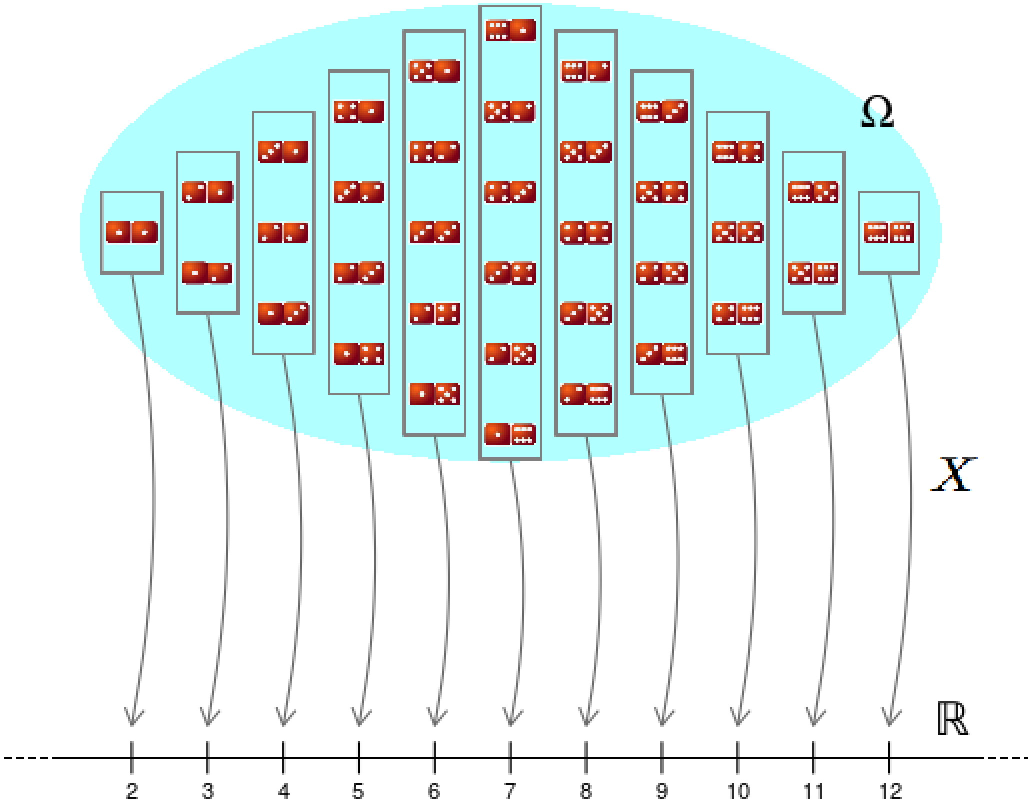
$X($ ⚃ $) = 4 \qquad X($ ⚄ $) = 5 \qquad X($ ⚅ $) = 6$

O, de una manera más gráfica:



Ejemplo:

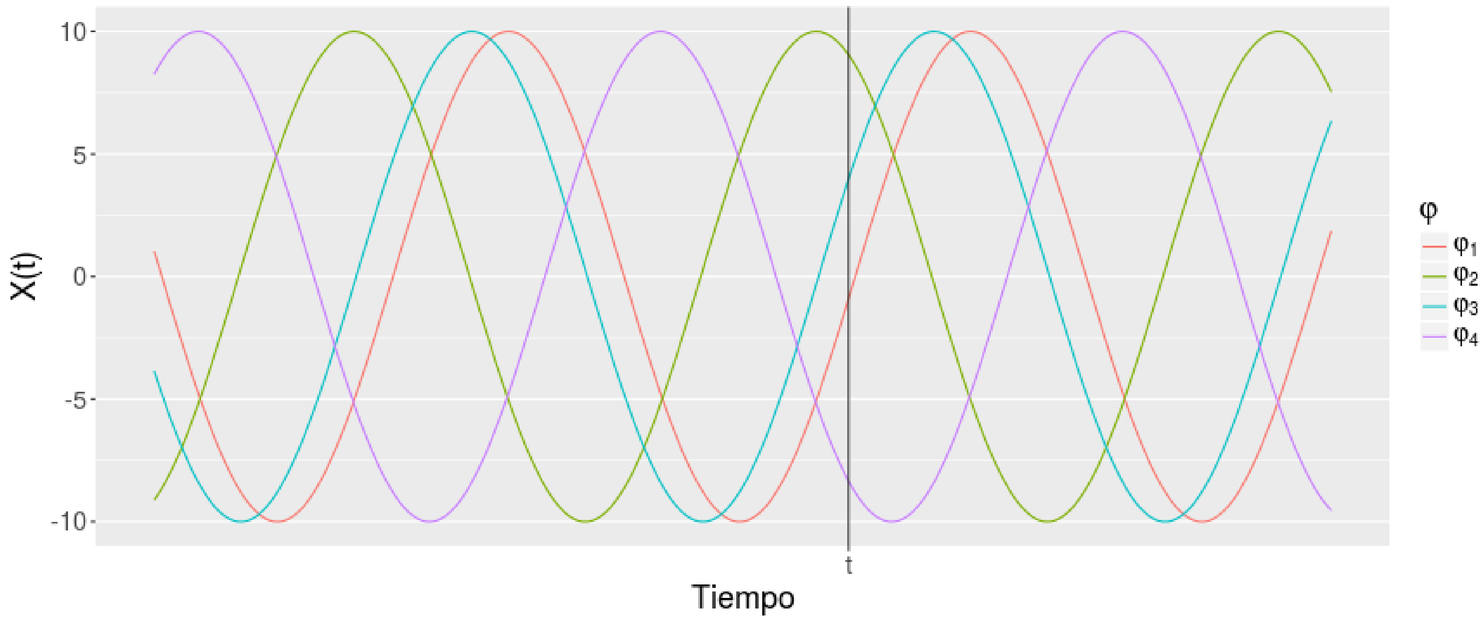
X = Suma de las puntuaciones obtenidas al tirar un dado dos veces sucesivas.



Ejemplo:

$X_t(\varphi)$ = Valor en el instante t de una señal de frecuencia fija con fase φ aleatoria.

$$X_t(\varphi) = 10 \cdot \cos(0.8t + \varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$



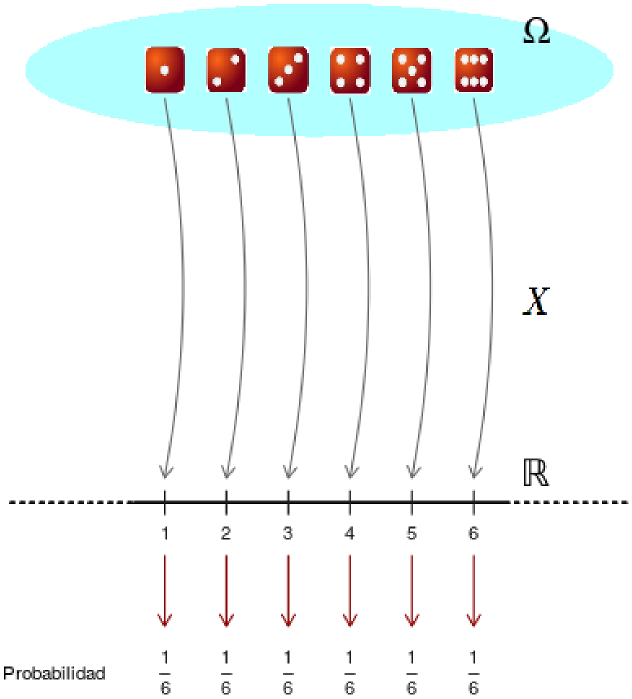
2. Función de distribución de una variable aleatoria.

Función de distribución de una variable aleatoria.

Cuando estudiamos una variable aleatoria, la primera cuestión de interés es **como se reparte (*como se distribuye*) la probabilidad** entre los distintos valores que puede tomar dicha variable. Como respuesta a esta cuestión se define la **función de distribución** de una variable aleatoria como:

$$F(x) = \Pr(X \leq x) \ : \ x \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado



X="Puntuación obtenida al lanzar un dado"

$$F(1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{6}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = \frac{2}{6}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{3}{6}$$

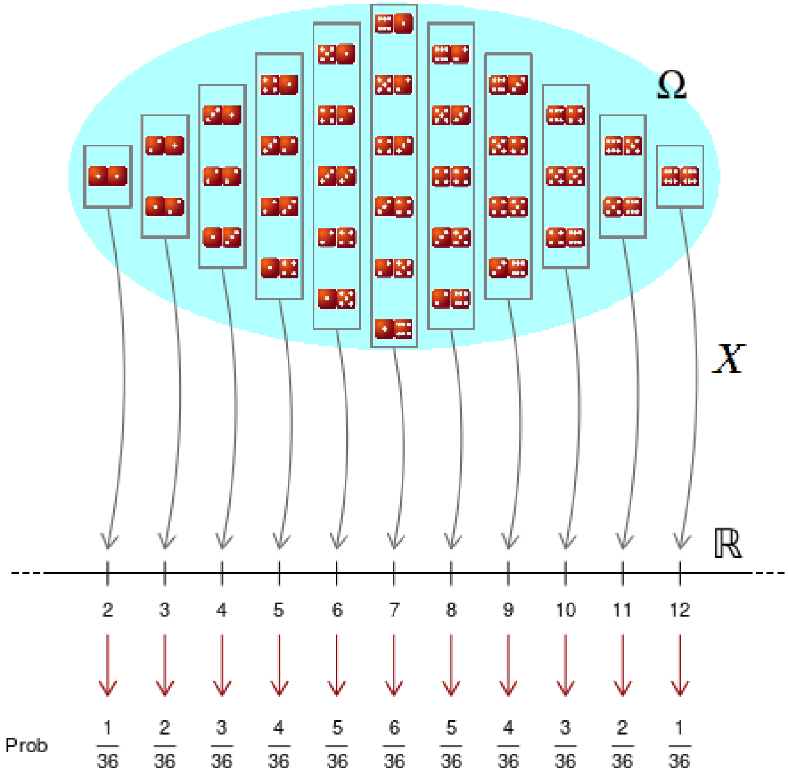
$$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{4}{6}$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{5}{6}$$

$$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{6}{6} = 1$$

Ejemplo: lanzamiento de un dado dos veces sucesivas

X = "Suma de puntuaciones de dos lanzamientos de un dado".



$$F(2) = P(X \leq 2) = \frac{1}{36}$$
$$F(3) = P(X \leq 3) = \frac{3}{36}$$
$$F(4) = P(X \leq 4) = \frac{6}{36}$$
$$F(5) = P(X \leq 5) = \frac{10}{36}$$
$$F(6) = P(X \leq 6) = \frac{15}{36}$$
$$F(7) = P(X \leq 7) = \frac{21}{36}$$
$$F(8) = P(X \leq 8) = \frac{26}{36}$$
$$F(9) = P(X \leq 9) = \frac{30}{36}$$
$$F(10) = P(X \leq 10) = \frac{33}{36}$$
$$F(11) = P(X \leq 11) = \frac{35}{36}$$
$$F(12) = P(X \leq 12) = \frac{36}{36} = 1$$

Ejemplo: lugar donde se produce una avería en una carretera

Se considera un tramo recto y llano de carretera de 6 km de longitud en el que se ha instalado un sistema de control. Sea X el punto kilométrico de este tramo donde se registra la primera parada por avería de un coche desde que se instaló el sistema. Suponiendo que no hay ninguna razón para pensar que sea más probable que las averías se produzcan en un sitio u otro de la carretera, ¿Cuál sería la función de distribución de X?

Para determinar la forma de $F(x)$ podemos considerar que:

- El primer coche en averiarse en este tramo se parará entre el km 0 y el km 6; así pues, $X \in [0,6]$ y por tanto:
  - $F(0) = P(X \leq 0) = 0$
  - $F(6) = P(X \leq 6) = 1$
- Como las averías son equiprobables en cualquier lugar de la carretera, podemos razonar que:
  - La probabilidad de que se produzca la avería antes del km 3 es la mitad: $P(X \leq 3) = \frac{1}{2}$
- La probabilidad de que se produzca la avería antes del km 2 (tercera parte del tramo) es $P(X \leq 2) = \frac{1}{3}$
- En general, la probabilidad de que se produzca antes del km k es: $P(X \leq k) = \frac{k}{6}$

Por tanto:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x}{6} & 0 \leq x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución de probabilidad $F\left(t\right)$

La función $F\left(t\right) = P\left[X \leq t\right]$ verifica las siguientes propiedades:

- $\underset{t \to -\infty}{Lim}\, F\left(t\right) = 0$
- $\underset{t \to \infty}{Lim} F\left(t\right) = 1$
- $F\left(t\right)$ es una función **no decreciente**

Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

¿Cómo podemos calcular la probabilidad siguiente?

$$P\left[a < X \leq b\right]$$

Tengamos en cuenta que:

- $\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$
- $\{X \leq a\} \cap \{a < X \leq b\} = \emptyset$

Por tanto:

$$P\left[X \leq b\right] = P\left[X \leq a\right] + P\left[a < X \leq b\right]$$

$$F\left(b\right) = F\left(a\right) + P\left[a < X \leq b\right]$$

$$P\left[a < X \leq b\right] = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

Propiedades de la función de distribución de una variable aleatoria.

¿Cómo podemos calcular la probabilidad siguiente?

$$P\left[X=a\right]$$

- En este caso tenemos que $\forall h>0$

$$P\left[a-h<X\leq a\right]=F\left(a\right)-F\left(a-h\right)$$

- Podemos acercarnos a $P\left[X=a\right]$ si hacemos que h se acerque a 0:

$$\underset{h\to 0}{Lim}P\left[a-h<X\leq a\right]=\underset{h\to 0}{Lim}\left\{F\left(a\right)-F\left(a-h\right)\right\}$$

Por tanto:

$$P\left[X=a\right]=F\left(a\right)-F\left(a-\right)$$

3. Clasificación de variables aleatorias

Variables aleatorias discretas.

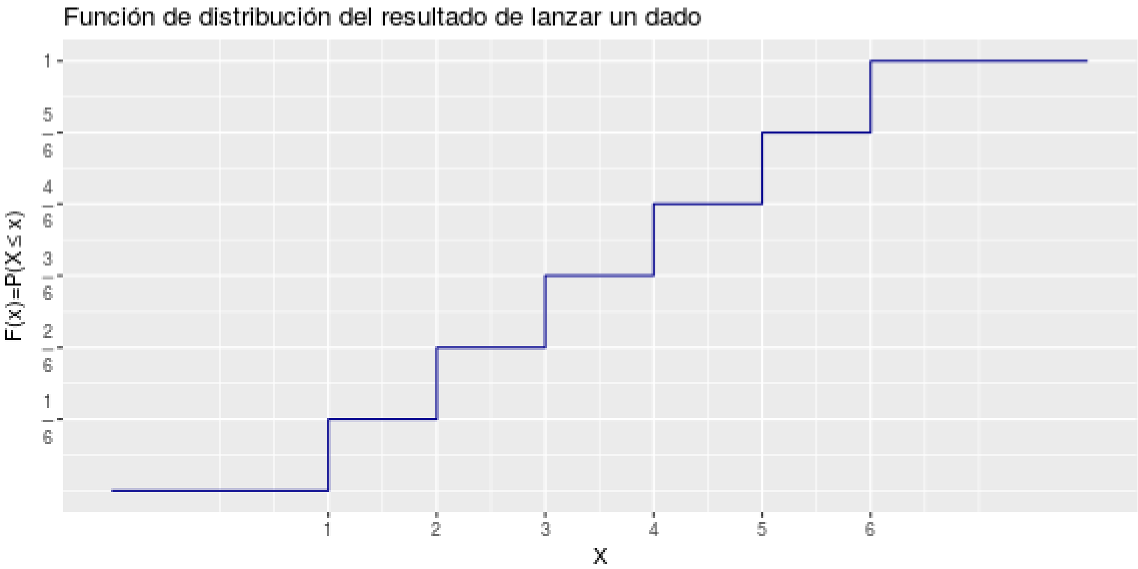
Una variable aleatoria X se dice **discreta** cuando el conjunto de valores que puede tomar es finito o numerable.

Ejemplos:

- El resultado del lanzamiento de un dado
- La suma de resultados de dos lanzamientos sucesivos de un dado
- El número de paquetes llegados a un router durante un tiempo t

Variables aleatorias discretas.

Su función de distribución es **escalonada** no decreciente y la probabilidad se concentra en los puntos de salto.



$$P\left[X=a\right]=F\left(a\right)-F\left(a-\right)$$

Variables aleatorias discretas.

Llamamos **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta X a la función:

$$p(t) = P(X = t) \ : \ t \in T$$

siendo T el conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria X. La función de probabilidad cumple que:

$$\sum_{t \in T} P\left(X = t\right) = 1$$

Además:

$$P\left(a < X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) = \sum_{a < t \leq b} P\left(X = t\right)$$

Variables aleatorias continuas.

Una variable aleatoria X se dice **continua** si y solo si su función de distribución $F(t)$ es continua. Ello implica que X toma valores en un rango continuo.

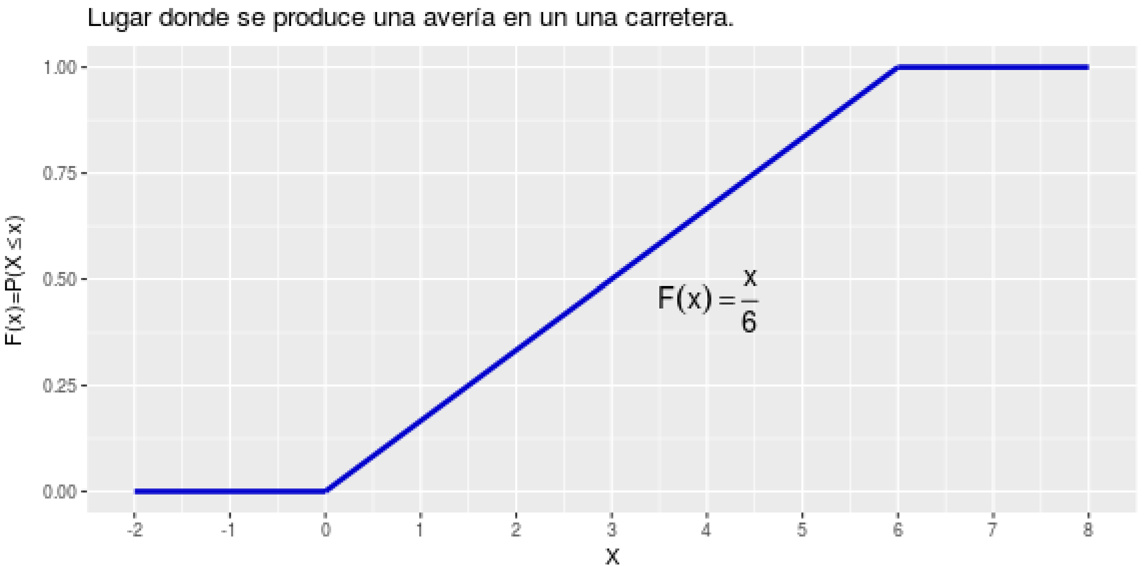
Ejemplos:

- La **duración** de una lámpara.
- El **tiempo entre llegadas** de dos paquetes de datos consecutivos a un router.
- El **valor en un instante** t de una señal $X(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ cuya *fase* φ es aleatoria.
- El **lugar** en una carretera en que se produce la avería de un coche.

Distribuciones de probabilidad continuas

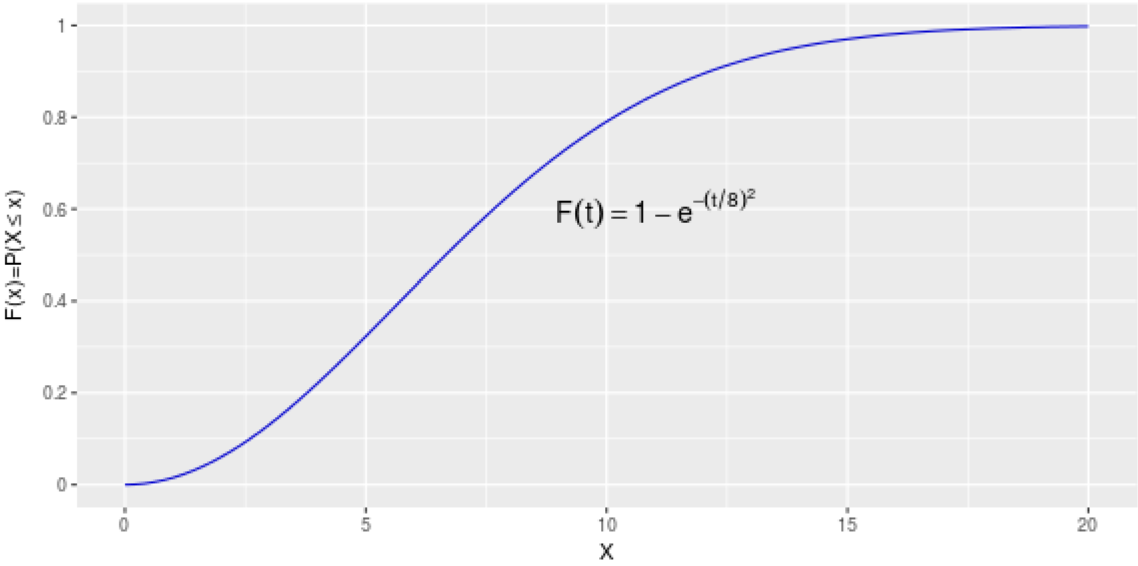
La función de distribución de una variable aleatoria continua es **no decreciente** (la función de probabilidad $F(x) = P(X \leq x)$ es acumulativa y por tanto no puede decrecer).

Ejemplo:



Distribuciones de probabilidad continuas

En muchas aplicaciones prácticas $F(x)$ es una función "suave":



En general para las distribuciones continuas:

$$P\left[X = a\right] = F\left(a\right) - F\left(a-\right) = 0$$

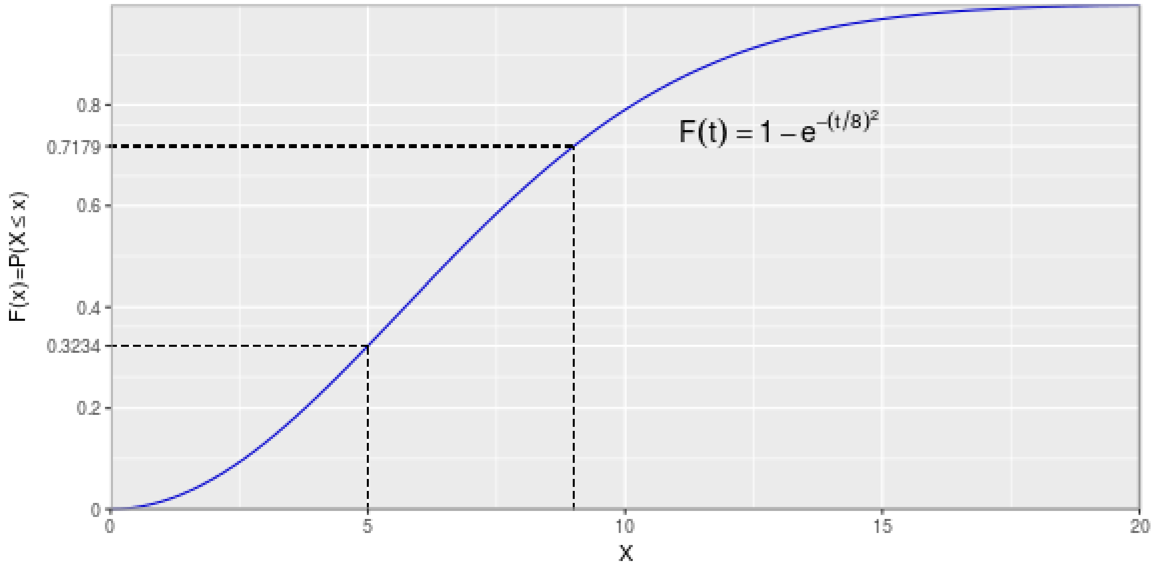
Distribuciones de probabilidad continuas

Recordemos que (tanto si la variable es discreta como si es continua):

$$P\left(a < X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

En el ejemplo anterior:

$$P\left(5 < X \leq 9\right) = F\left(9\right) - F\left(5\right) = \left(1 - e^{-(9/8)^2}\right) - \left(1 - e^{-(5/8)^2}\right) = 0.7179 - 0.3234 = 0.3945$$



4. Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua.

Función de densidad de Probabilidad

Una función no negativa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ que satisface la condición:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right) \cdot dt = 1$$

es la **función de densidad de probabilidad** de una variable aleatoria X, si su función de distribución acumulativa $F\left(t\right)$ puede expresarse como:

$$F\left(t\right) = \Pr\left(X \leq t\right) = \int_{-\infty}^{t} f\left(x\right) \cdot dx \;\;:\;\; t \in \mathbb{R}$$

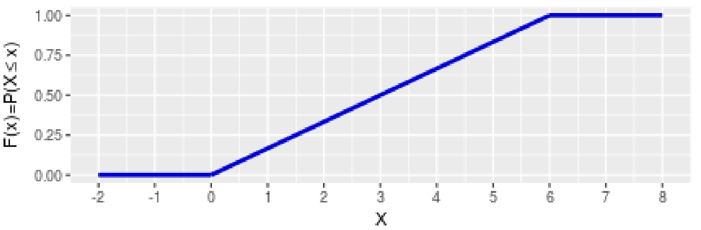
En tal caso la función de distribución $F(t)$ se dice **absolutamente continua**.

Ejemplo:

X="Lugar donde se para un coche por avería en una carretera de 6 km"

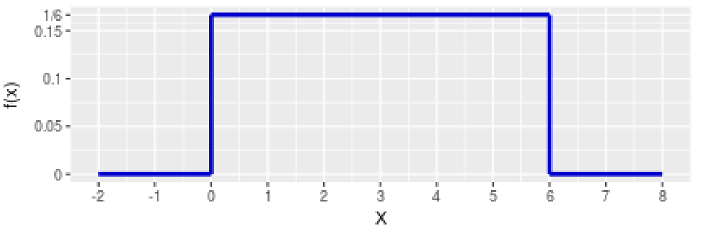
Función de distribución:

$$F(x) = \frac{x}{6}, \quad x \in [0,6]$$



Función de densidad:

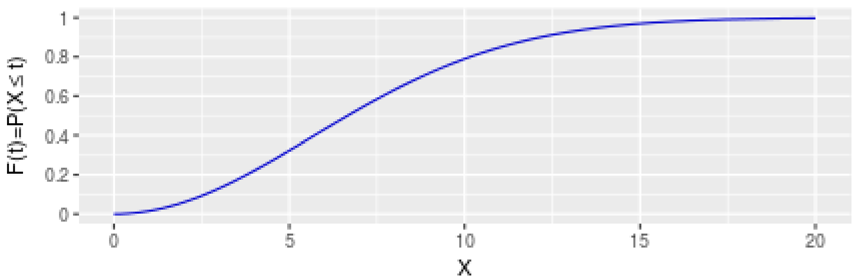
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & x \in [0,6] \\ 0 & x \notin [0,6] \end{cases}$$



Ejemplo:

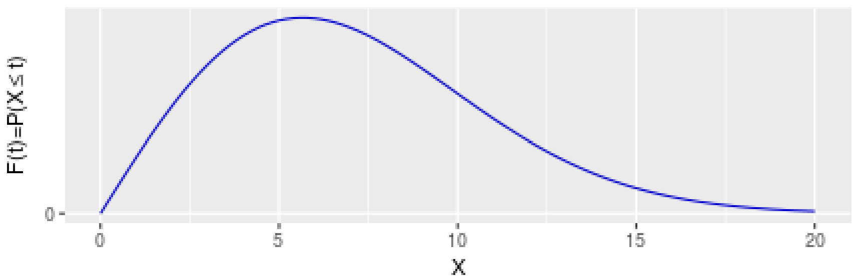
- Función de distribución:

$$F(t) = 1 - e^{-(t/8)^2} \; : \; \forall t \geq 0$$



- Función de densidad:

$$f(t) = \frac{t}{32} e^{-(t/8)^2} \; : \; \forall t \geq 0$$



Propiedades de la función de densidad de Probabilidad

[1.] Sea X una variable aleatoria y sea $f\left(x\right)$ su función de densidad de probabilidad. Entonces:

$$P\left(a < X \leq b\right) = \int_a^b f\left(x\right) \cdot dx$$

Demostración:

$$P\left(a < X \leq b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^b f\left(x\right) \cdot dx - \int_{-\infty}^a f\left(x\right) \cdot dx = \int_a^b f\left(x\right) \cdot dx$$

Propiedades de la función de densidad de Probabilidad

[1.] Sea X una variable aleatoria y sea $f(x)$ su función de densidad de probabilidad. Entonces:

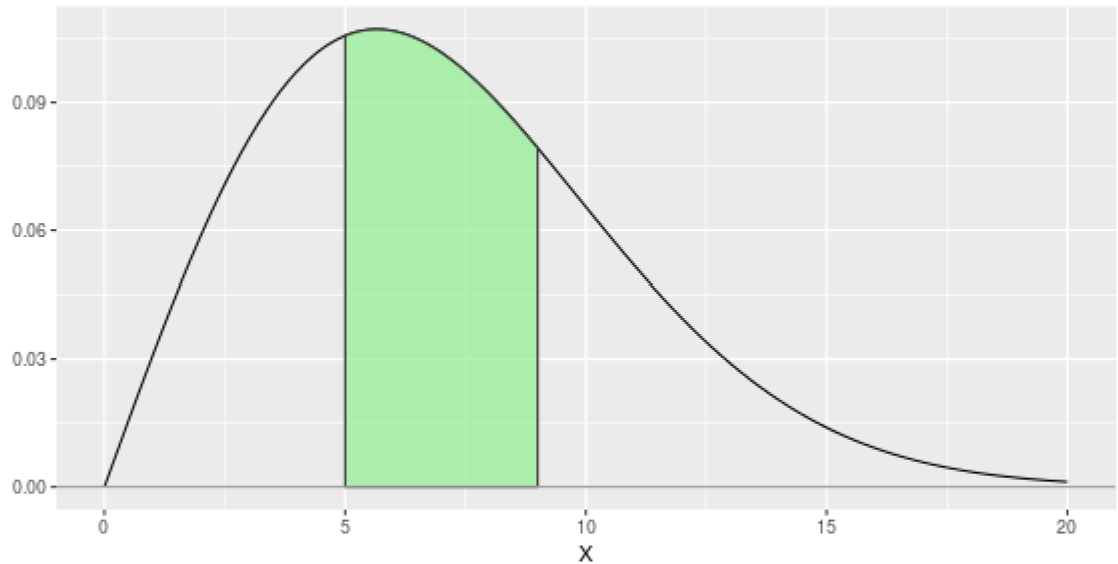
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

Interpretación geométrica: la probabilidad de que la variable X tome valores entre a y b es el **área bajo la función de densidad** de X entre esos dos puntos.

Ejemplo

$$f(t) = \frac{t}{32} e^{-(t/8)^2} : \ \forall t \geq 0$$

$$P(5 < X \leq 9) = \int_5^9 f(t) \cdot dt \approx 0.3945$$



Observación: ¿por qué el nombre "densidad de probabilidad"?

Si elegimos un valor h lo suficientemente pequeño:

$$P\left(t < X \leq t+h\right) = \int_{t}^{t+h} f\left(x\right) dx \approx f(t)h$$

ya que la integral puede aproximarse por el área de un rectángulo de base h y altura $f(t)$

De aquí se sigue que para $h \to 0$:

$$f(t) \approx \frac{P\left(t < X \leq t+h\right)}{h}$$

Esto es, $f(t)$ es la cantidad de probabilidad en un entorno pequeño de t dividido por lo que mide dicho entorno. Esto justifica que $f(t)$ reciba precisamente el nombre de densidad de probabilidad en t.

Propiedades de la función de densidad de Probabilidad

[2.] Sea X una variable aleatoria y sea $f(x)$ su función de densidad de probabilidad. Si $f(x)$ es continua:

$$F(t+h) - F(t) = \int_t^{t+h} f(x) \cdot dx$$

de donde:

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x) \cdot dx$$

Para un h es lo suficientemente pequeño se tiene que $\int_t^{t+h} f(x)\, dx \approx f(t)h$; por tanto, tomando limite cuando $h \to 0$:

$$F^{'}(t) = f(t)$$