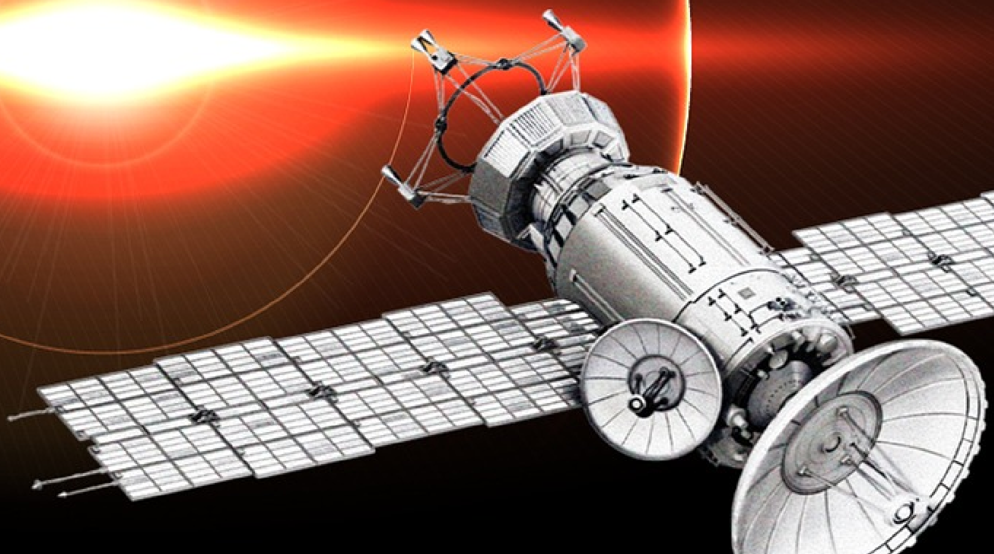
Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 6: Procesos Estacionarios: Análisis Espectral



Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

Procesos armónicos

Procesos armónicos

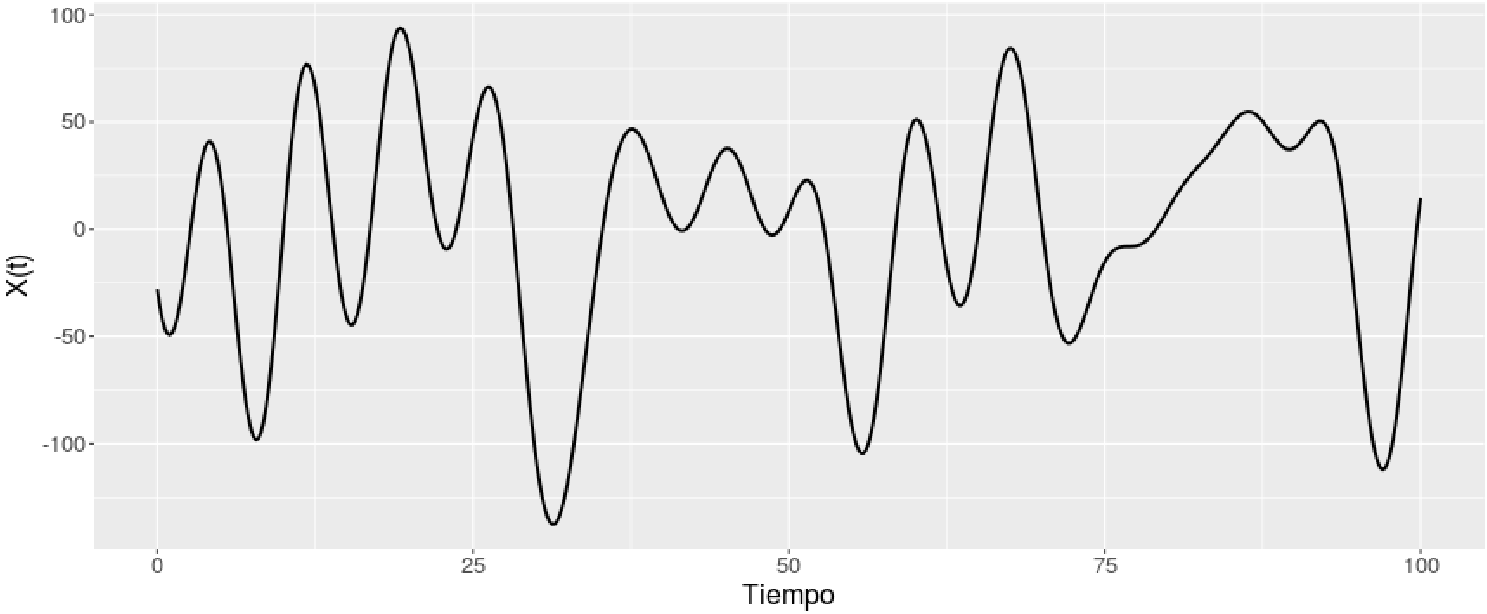
Ya hemos visto que un **Proceso Armónico** es un proceso estocástico de la forma:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$$

donde:

- Las amplitudes A_k son **constantes**.
- Las frecuencias ω_k son también **constantes**
- Las fases $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ son **variables aleatorias** independientes e idénticamente distribuidas, con distribución Uniforme en $[0, 2\pi]$

Ejemplo: Superposición de 500 armónicos



$$X(t) = \sum_{k=1}^{500} A_k \cdot cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$$

Procesos armónicos

Hemos visto también que para la k-esima componente armónica del proceso, $X_k(t) = A_k cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$, se tiene que:

- $E\left[X_k\left(t\right)\right] = 0\ \forall t.$
- $Cov\left(X_k\left(t\right), X_k\left(t+\tau\right)\right) = \frac{A_k^2}{2} cos\omega_k\tau\ \ \forall t$
- $\sigma_k^2 = Var\left(X_k\left(t\right)\right) = \frac{A_k^2}{2}\ \forall t$

Procesos armónicos

Como consecuencia, un proceso armónico construido como superposición (**suma finita**) de componentes armónicas:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$$

cumple que:

1. $E\left[X(t)\right] = 0 \ \forall t$

1. $R(\tau) = Cov\left(X(t), X(t+\tau)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{2} cos\omega_k \tau$

1. $R(0) = \sigma_X^2 = Var\left(X(t)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$

Procesos armónicos

La expresión:

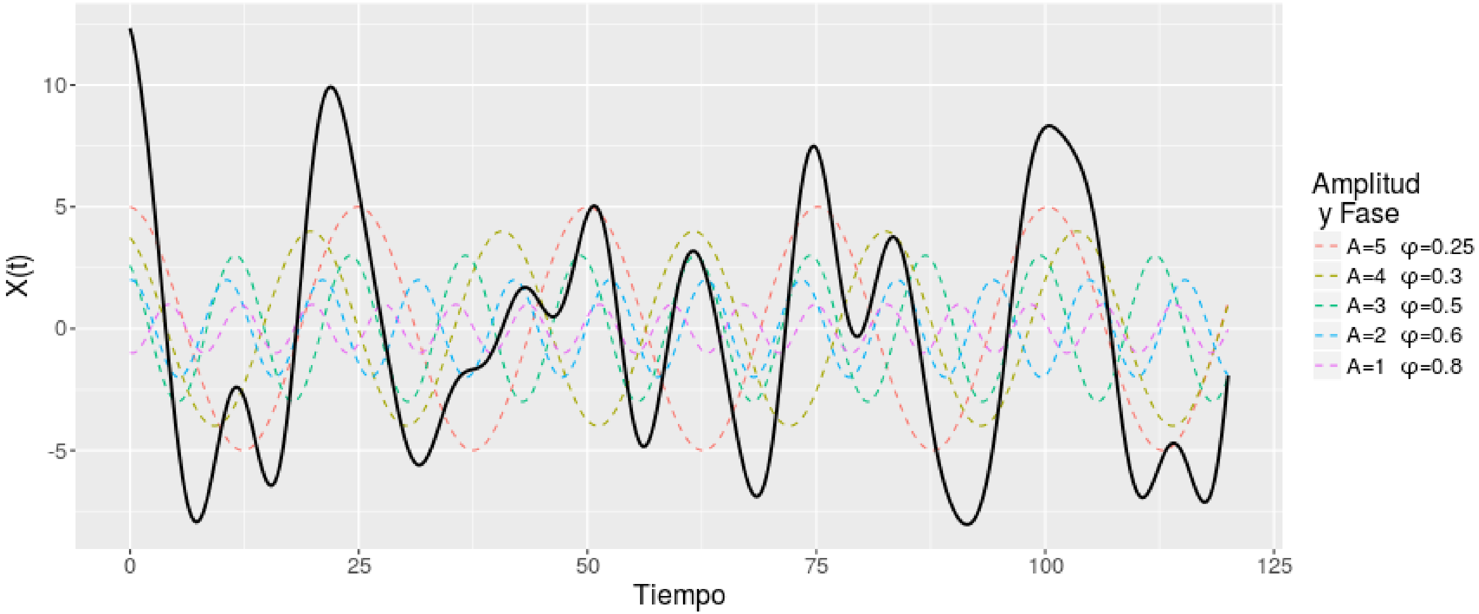
$$\sigma_X^2 = Var\left(X\left(t\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

implica que $\sigma_k^2 = \frac{A_k}{2}$ es la contribución del armónico $X_k(t) = A_k cos(\omega_k t + \varphi)$ a la varianza total del proceso $X(t)$:

Frecuencia	ω_1	ω_2	...	ω_n
Contribución	$\frac{A_1^2}{2}$	$\frac{A_2^2}{2}$	...	$\frac{A_n^2}{2}$

Si interpretamos el proceso $X(t)$ como una **señal** la varianza σ_X^2 del proceso puede interpretarse como la **potencia** de la señal, y σ_k^2 como la contribución del armónico $X_k(t)$ a dicha potencia.

Ejemplo: Procesos armónicos: superposición de 5 armónicos



$$X(t) = 5cos\left(0.25t + \varphi_1\right) + 3cos\left(0.5t + \varphi_2\right) + cos\left(0.8t + \varphi_3\right) +$$

$$+4cos\left(0.3t + \varphi_4\right) + 2cos\left(0.6t + \varphi_5\right)$$

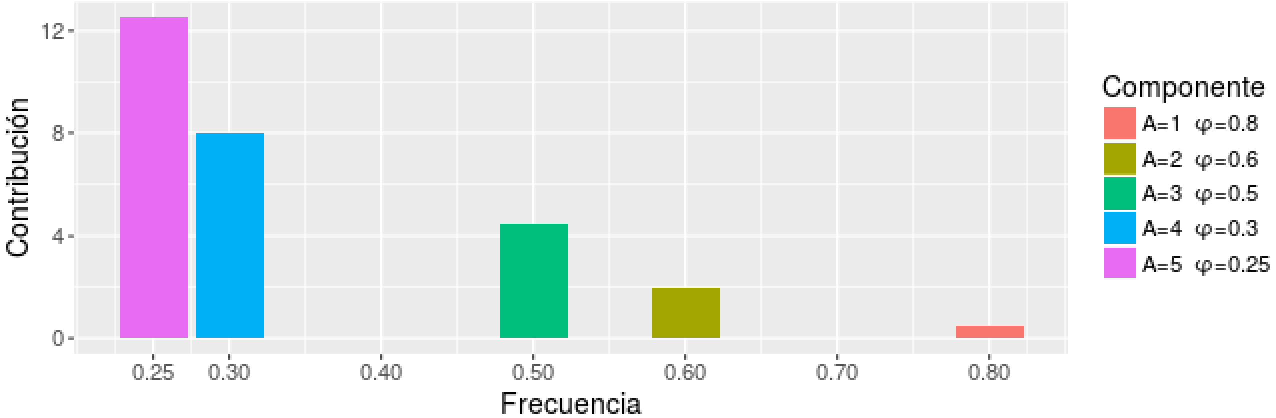
¿Cuál es la contribución de cada armónico a la varianza del proceso (potencia de la señal)?

Ejemplo: Procesos armónicos: superposición de 5 armónicos

$X(t) = 5cos\left(0.25t + \varphi_1\right) + 4cos\left(0.3t + \varphi_4\right) + 3cos\left(0.5t + \varphi_2\right) + 2cos\left(0.6t + \varphi_5\right) + cos\left(0.8t + \varphi_3\right)$

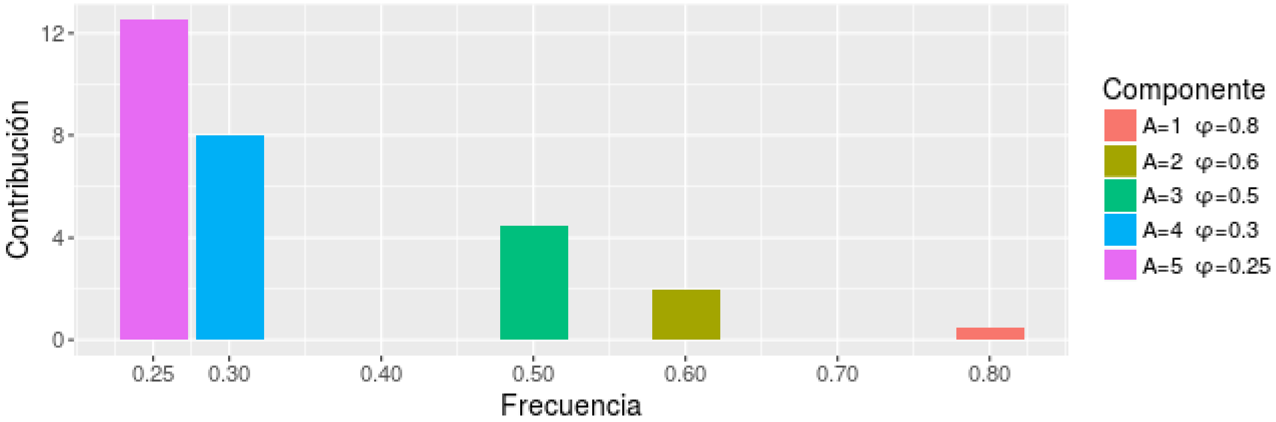
En este ejemplo, la contribución de cada armónico (ω_k) a la varianza total del proceso sería:

Frecuencia	0.25	0.30	0.50	0.60	0.80
Contribución (σ_k^2)	12.50	8.00	4.50	2.00	0.50
Contribución (en proporción)	0.45	0.29	0.16	0.07	0.02



Ejemplo: Procesos armónicos: superposición de 5 armónicos

- Nótese que esta figura es muy similar a la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta.
- En lugar de representar la probabilidad que corresponde a cada valor de la variable, cada barra representa la parte de la potencia total (varianza) que corresponde a cada armónico (frecuencia)



Densidad espectral

Teorema de representación espectral

- Un proceso armónico es, en general, de la forma:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot cos\left(\omega_k t + \varphi_k\right)$$

- **Teorema de representación espectral**: Bajo ciertas condiciones, un proceso estacionario puede expresarse como:

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A(\omega) \cos \omega t \cdot dZ(\omega)$$

donde $dZ(\omega)$ expresa la forma en que contribuyen al proceso las frecuencias en el intervalo $[\omega, \omega + d\omega]$

La **luz blanca** es un ejemplo de superposición *no numerable* de armónicos que recorren todas las frecuencias del intervalo $[-\pi, \pi]$ con amplitud $A(\omega)$ constante.

Función de densidad espectral

- Recordemos que dada una variable aleatoria X con función de densidad $f(x)$:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

- Si $X(t)$ es un proceso estacionario que puede considerarse como una superposición **continua** de armónicos con frecuencias en $[\alpha, \beta]$, la **función de densidad espectral** es una función que permite obtener la contribución de las frecuencias del rango $[\omega_1, \omega_2]$ a la varianza del proceso (potencia de la señal) mediante:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega)\, d\omega$$

¿Como calculamos $f(\omega)$?

Función de densidad espectral

Sea $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ un proceso estacionario que verifica:

$$\sum_{\tau} |R(\tau)| < \infty$$

Entonces la **función de densidad espectral** es:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau}\,;\ -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$

Función de densidad espectral

- La función de densidad espectral es convergente:

$$|f(\omega)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau}| = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R(\tau)| < \infty$$

- La función de densidad espectral toma valores reales ($f(\omega) \in \mathbb{R}\ \forall\omega$): en efecto, teniendo en cuenta que $cos\,(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$ y que $R(-\tau) = R(\tau)$:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} = \frac{1}{2\pi} \left(R(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} \left(R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} + R(-\tau) \cdot e^{i\omega\tau} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(R(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} R(\tau) \cdot \cos\omega\tau \right)$$

Función de densidad espectral

- La función de autocovarianza puede calcularse a partir de la función de densidad espectral mediante:

$$R\left(\tau\right)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\omega\tau}f\left(\omega\right)d\omega\,,\quad\tau\in Z$$

- Por tanto, para $\tau=0$:

$$R\left(0\right)=\sigma_X^2=\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\omega\right)d\omega$$

- En consecuencia, la contribución de las frecuencias de un intervalo $[\omega_1,\omega_2]$ (banda de frecuencias) a la varianza del proceso (potencia de la señal) es, tal como esperábamos:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}f\left(\omega\right)d\omega$$

Algunos espectros especiales: Ruido blanco

- Para el ruido blanco:

$$R(\tau) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } \tau = 0 \\ 0 & \text{si } \tau \neq 0 \end{cases}$$

- Por tanto:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_\tau R(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} = \frac{\sigma_X^2}{2\pi}\ ; \ -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$$

- Esta función es constante, lo que significa que todas las frecuencias realizan la misma aportación a la potencia de la señal; esto es lo que ocurre con la luz blanca, de ahí el nombre del proceso.

Algunos espectros especiales: proceso AR(1)

- Sea $X(t)$ un proceso AR(1) con parámetro a, esto es, $X(t) = aX(t-1) + e(t)$.

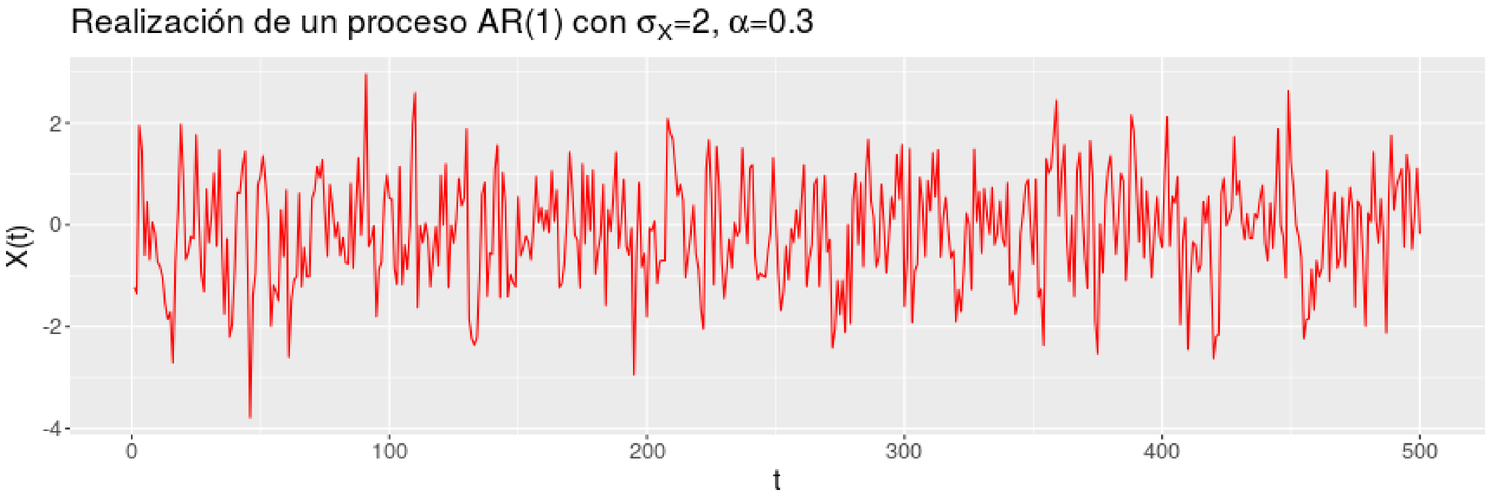
- Su función de autocovarianza es: $R\left(\tau\right) = a^{|\tau|} \cdot \sigma_X^2 \ ; \ \tau \in \mathbb{Z}$

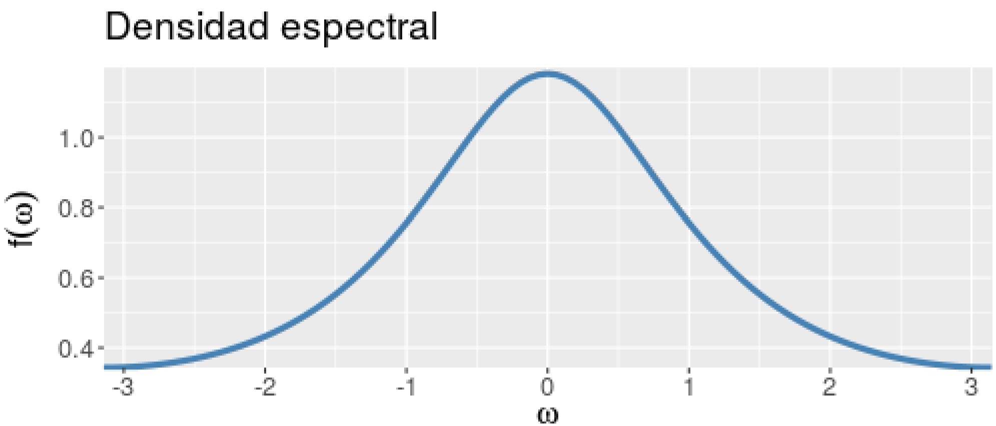
- Su función de densidad espectral es entonces:

$$f\left(\omega\right) = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} a^{|\tau|} = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \left(\sum_{\tau=0}^{\infty} \left(ae^{-i\omega}\right)^{\tau} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \left(ae^{i\omega}\right)^{\tau} \right) =$$

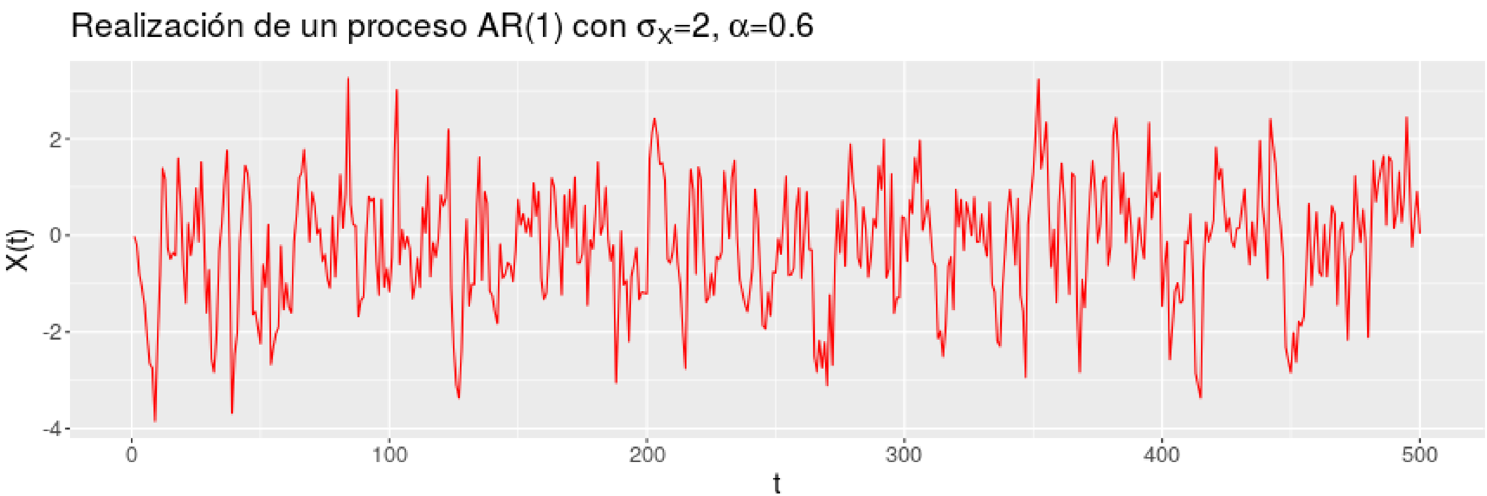
$$= \frac{\sigma_X^2}{2\pi} \left(\frac{1}{1-ae^{-i\omega}} + \frac{ae^{i\omega}}{1-ae^{i\omega}} \right) = \frac{\sigma_X^2 \left(1-a^2\right)}{2\pi \left(1 - 2a\cos\omega + a^2\right)}$$

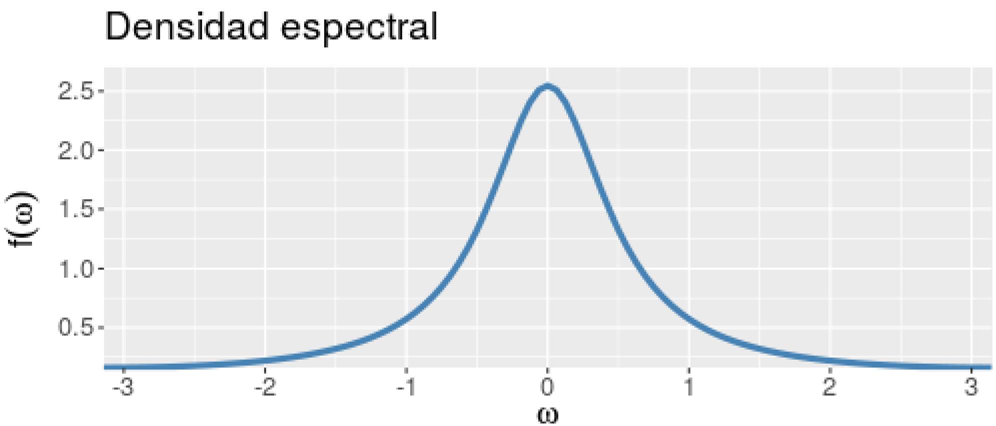
Algunos espectros especiales: proceso AR(1)





Algunos espectros especiales: proceso AR(1)





Algunos espectros especiales: proceso AR(1)