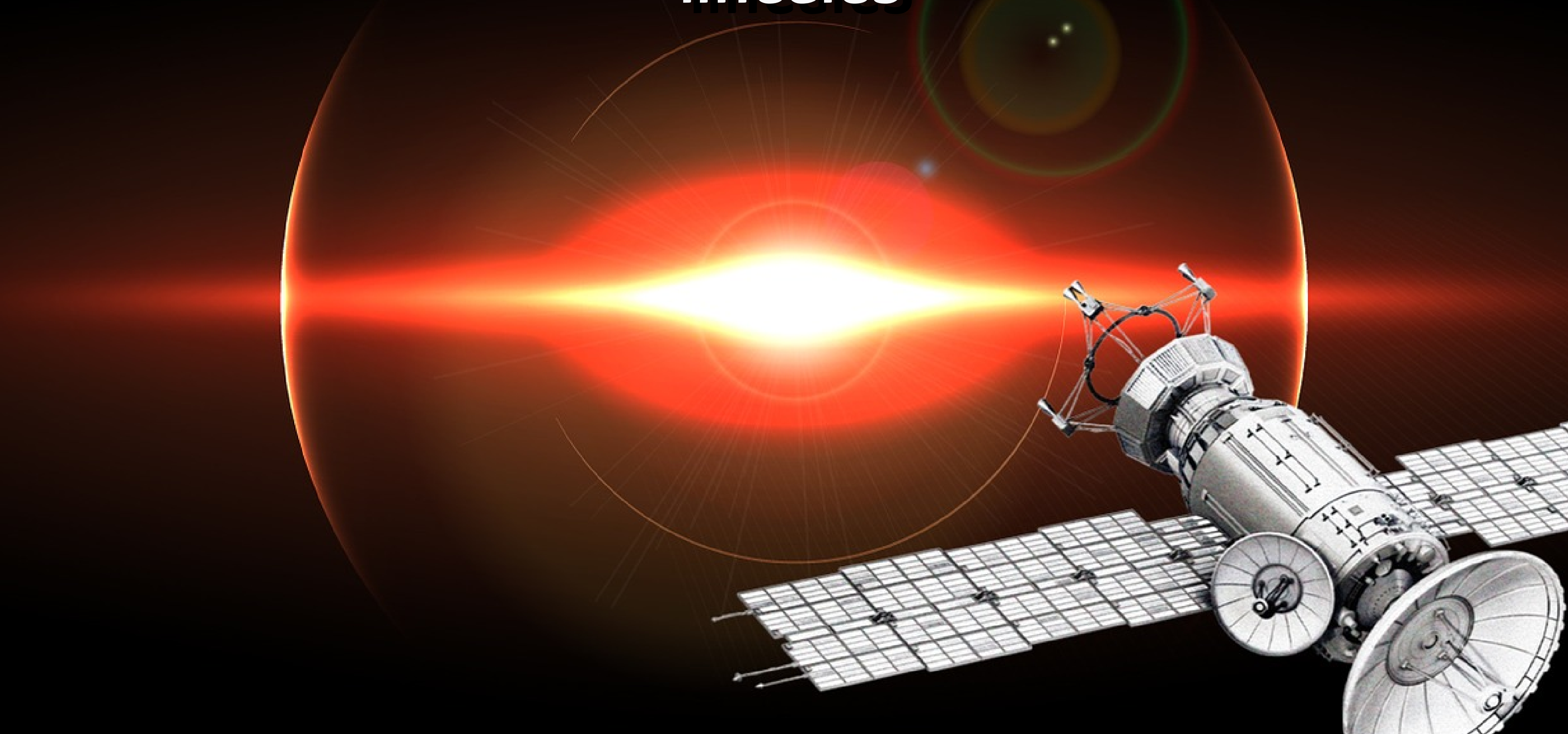
Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 6: Procesos Estacionarios: Filtros lineales



Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

Filtros Lineales

Filtros Lineales

- Sea $X(t)$ un proceso estacionario, formado por una superposición continua de armónicos con frecuencias en el rango $[-\pi, \pi]$
- Se desea **"filtrar"** el proceso: *modificar la contribución a la varianza del proceso (potencia de la señal) de las componentes armónicas en cierto rango* $[\omega_1, \omega_2]$
- Esto se consigue construyendo un nuevo proceso $Y(t)$ mediante:

$$Y(t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u \cdot X(t-u)$$

siendo:

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |g_u| < \infty$$

Filtros Lineales

- Dado $Y\left(t\right) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} g_u \cdot X\left(t-u\right)$, se denomina **Filtro Lineal** a la sucesión de coeficientes g_u.

- Obsérvese que $Y\left(t\right)$ es una combinación lineal de valores pasados, presente y *futuros* de $X(t)$

- El filtro se dice **realizable** si $g_u = 0,\ u < 0$, esto es, si no depende de los valores futuros de $X(t)$ (que obviamente no han podido observarse aún)

Filtros Lineales

Si $X(t)$ tiene función de densidad espectral $f_X(\omega)$, entonces la función de densidad espectral de $Y(t)$ viene dada por la ecuación:

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega) \cdot \left|\Gamma(\omega)\right|^2$$

siendo:

$$\Gamma(\omega) = \sum_u g_u \cdot e^{-i\omega u}$$

La función $\Gamma(\omega)$ se denomina **Función de transferencia**

Filtros Lineales

Si:

$$\Gamma(\omega) = \sum_u g_u \cdot e^{-i\omega u}$$

Los coeficientes g_u pueden hallarse mediante la transformada inversa de esta función:

$$g_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\omega) \cdot e^{i\omega u} \cdot d\omega$$

Filtros Lineales: Ejemplo

- Se desea filtrar un proceso estacionario $X(t)$ de tal forma que el proceso de salida resultante $Y(t)$ concentre toda su varianza sobre los armónicos de frecuencia **inferior** a ω_0.

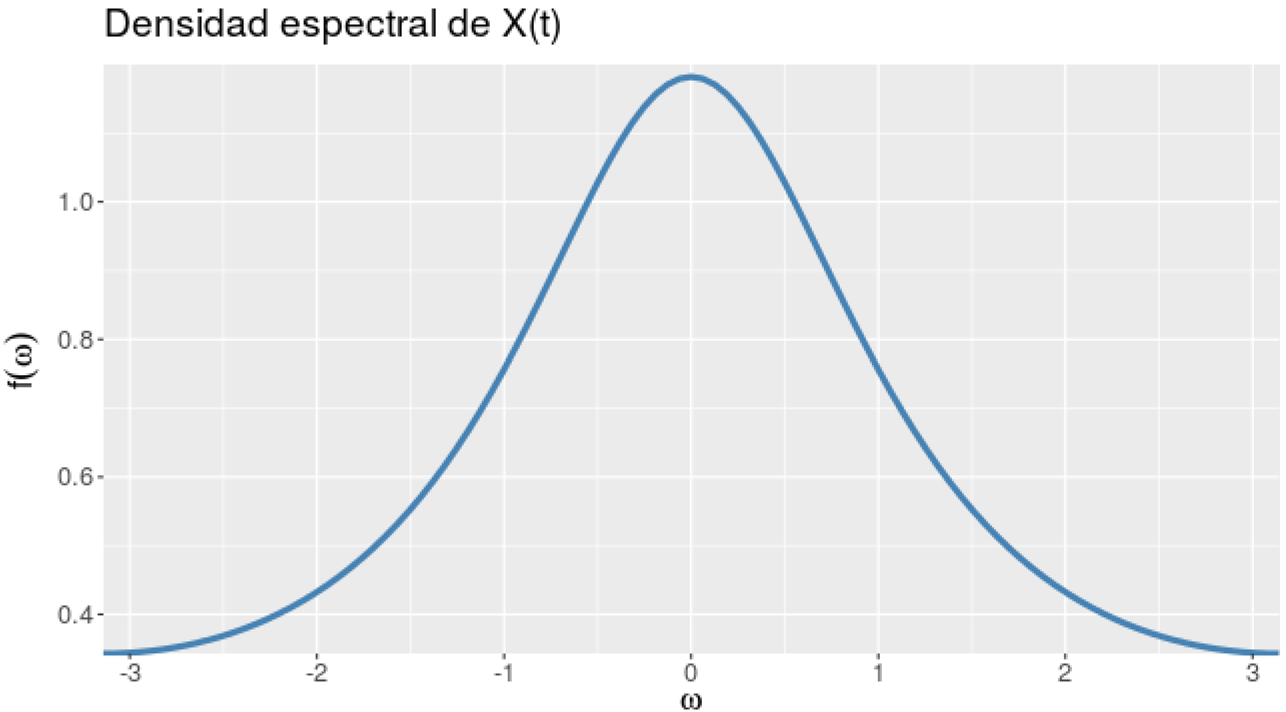
- Esto es lo mismo que filtrar (eliminar) los armónicos con frecuencia **superior** a ω_0

- Como $f_Y(\omega) = f_X(\omega) \cdot |\Gamma(\omega)|^2$, utilizaremos una función de transferencia de la forma:

$$\Gamma(\omega) = \begin{cases} 1 & : \ |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & : \ |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

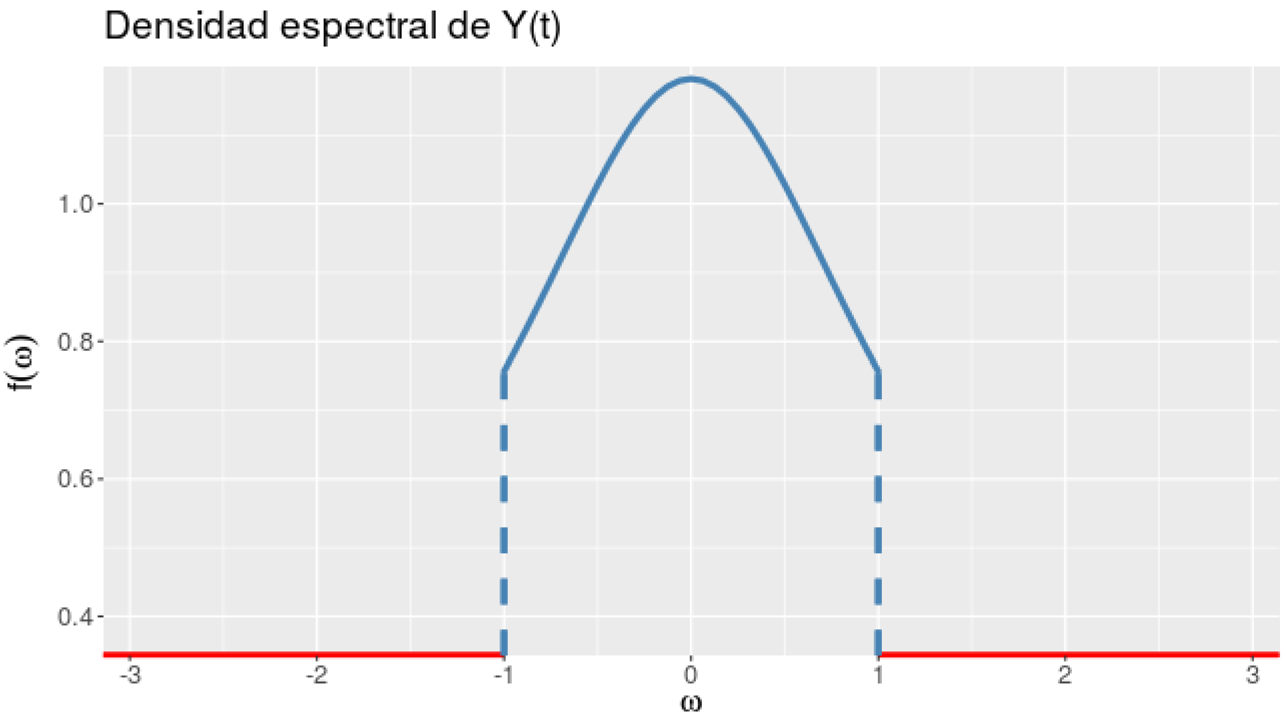
Filtros Lineales: Ejemplo

Gráficamente:



Filtros Lineales: Ejemplo

Gráficamente (eligiendo $\omega 0 = 1$:



Filtros Lineales: Ejemplo

Como la función de transferencia es:

$$\Gamma(\omega) = \begin{cases} 1 & : \ |\omega| \leq \omega_0 \\ 0 & : \ |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

los coeficientes g_u del filtro serán:

$$g_u = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\omega) \cdot e^{i\omega u} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{i\omega u} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{iu} e^{i\omega u} \right]_{-\omega_0}^{\omega_0} = \frac{1}{2\pi i u} \left(e^{i\omega_0 u} - e^{-i\omega_0 u} \right) =$$

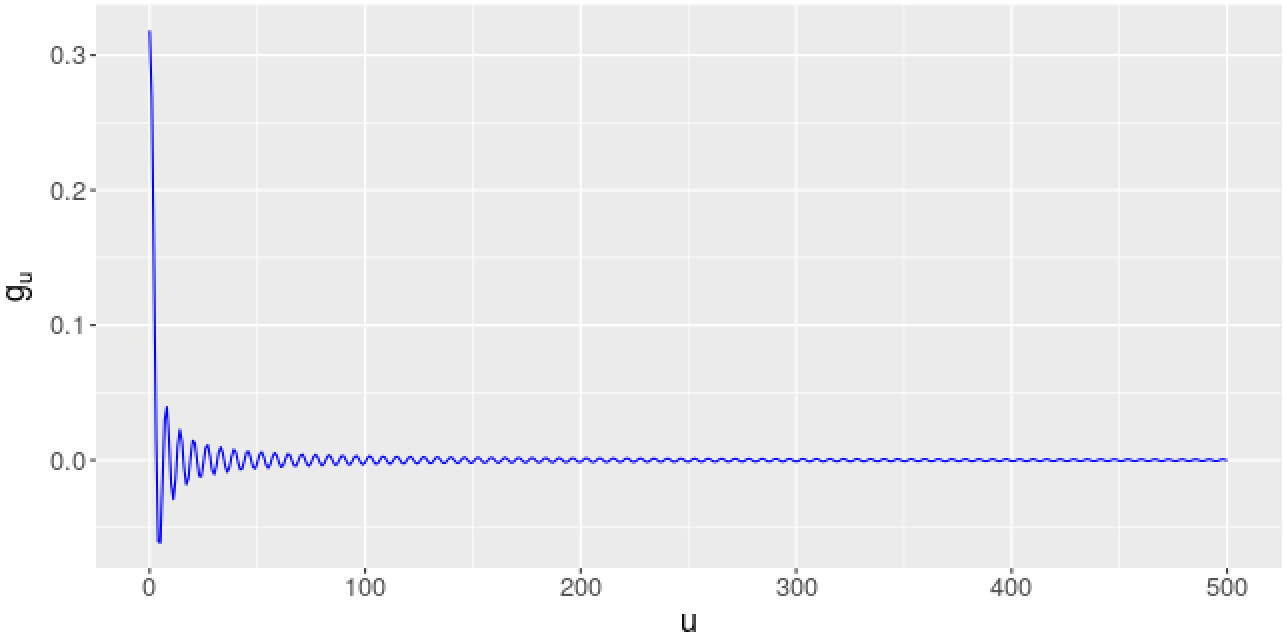
$$= \frac{1}{2\pi i u} \left(cos(\omega_0 u) + isen(\omega_0 u) - cos(\omega_0 u) + isen(\omega_0 u) \right) = \frac{1}{\pi u} sen(\omega_0 u)$$

Filtros Lineales: Ejemplo

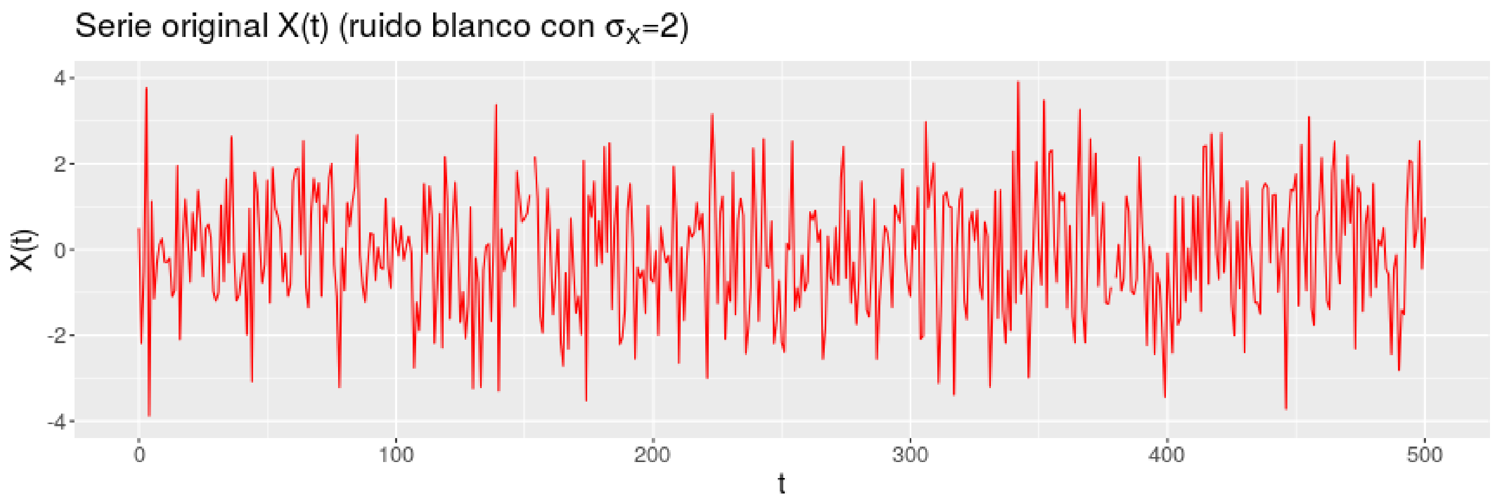
En particular:

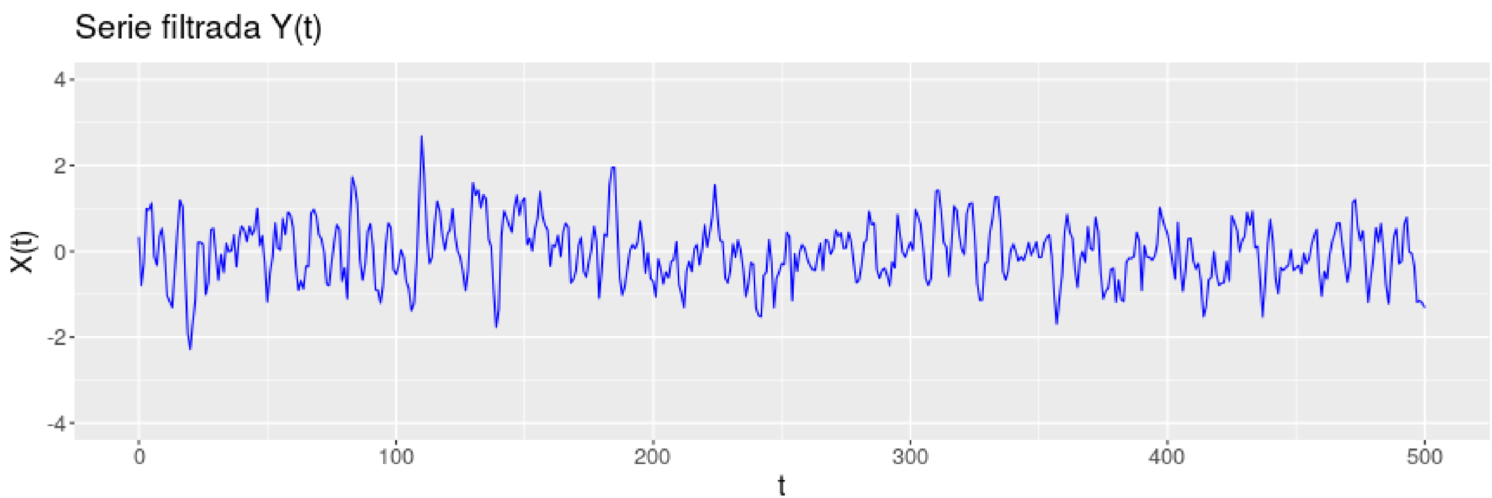
$$g_0 = \lim_{u \to 0} \frac{1}{\pi u} sen\left(\omega_0 u\right) = \lim_{u \to 0} \frac{\omega_0}{\pi} \frac{sen\left(\omega_0 u\right)}{\omega_0 u} = \frac{\omega_0}{\pi}$$

Si elegimos $\omega_0 = 1$ la representación gráfica de los primeros 500 coeficientes del filtro es:



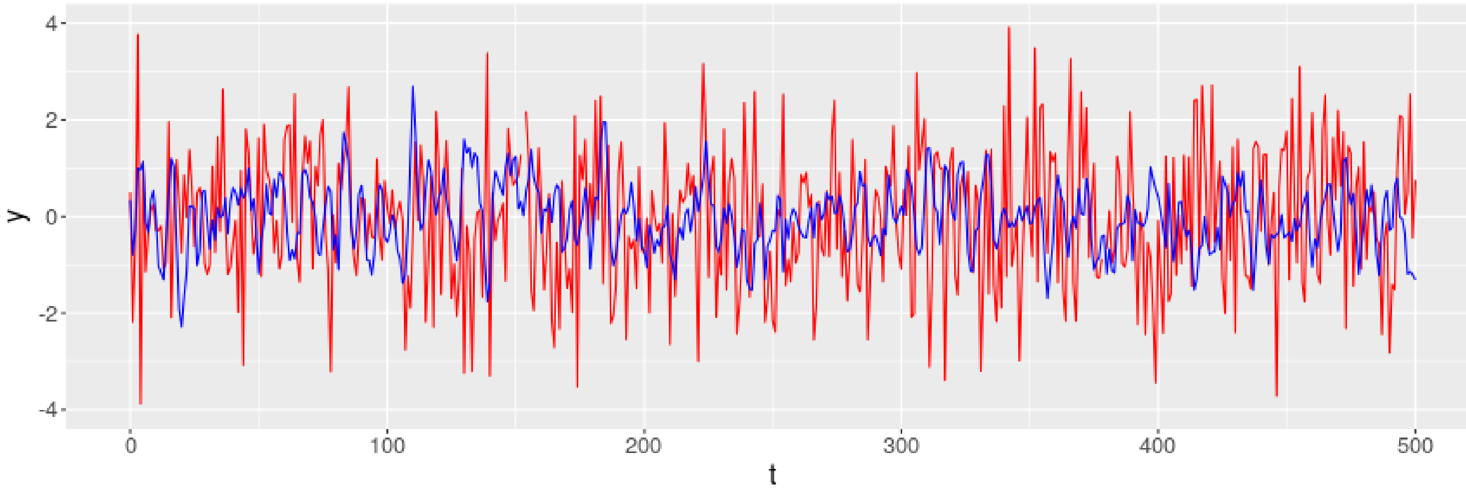
Filtros Lineales: Ejemplo





Filtros Lineales: Ejemplo

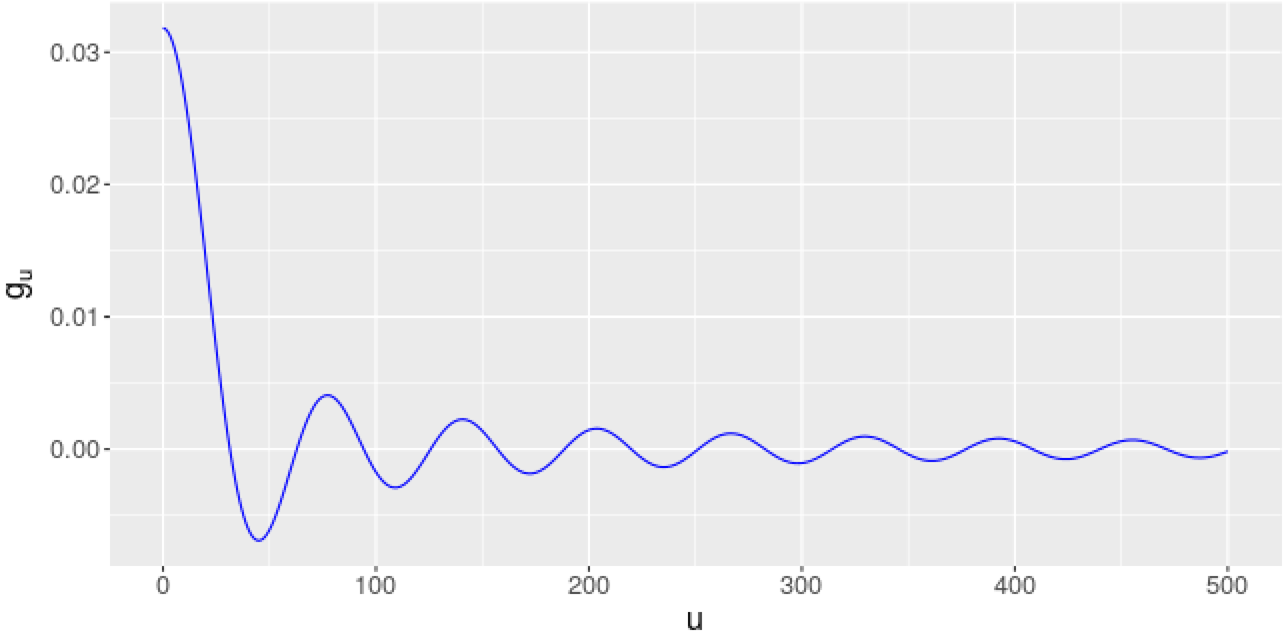
Ambas series superpuestas:



Como puede apreciarse, el efecto del filtro ha sido, efectivamente, eliminar la variación a las frecuencias más altas.

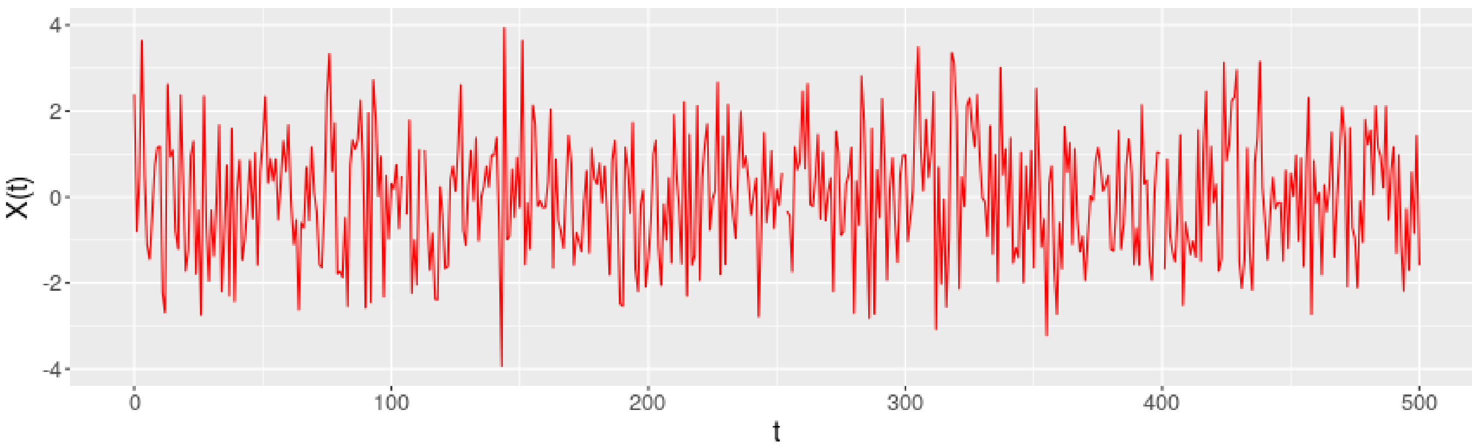
Filtros Lineales: Ejemplo

Si elegimos ahora $\omega_0 = 0.1$ (filtramos todas las frecuencias excepto las más bajas), los primeros 500 coeficientes del filtro son:

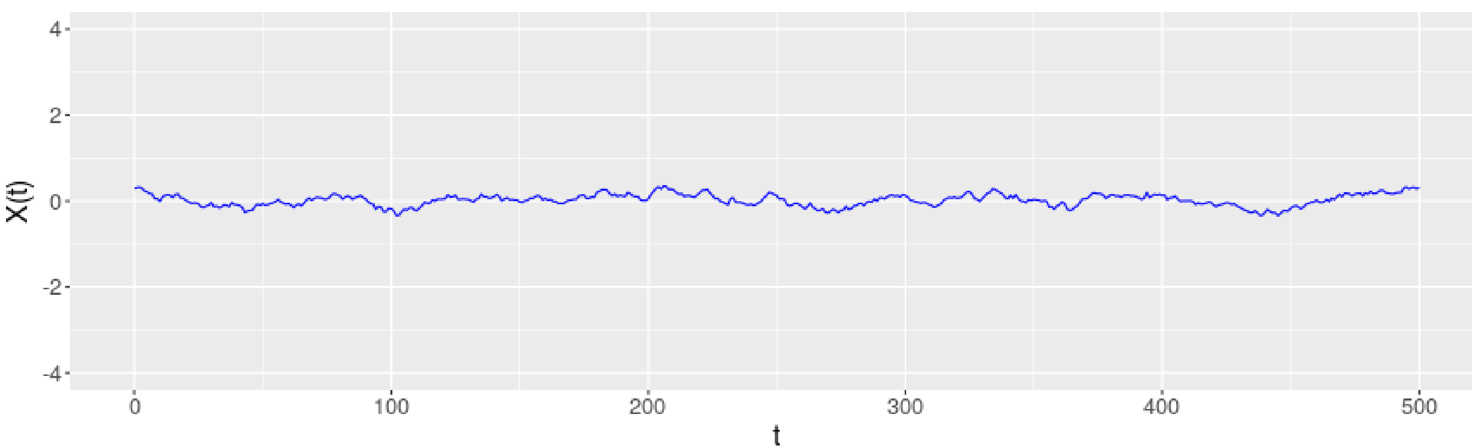


Filtros Lineales: Ejemplo

Serie original X(t) (ruido blanco con σ_X=2)

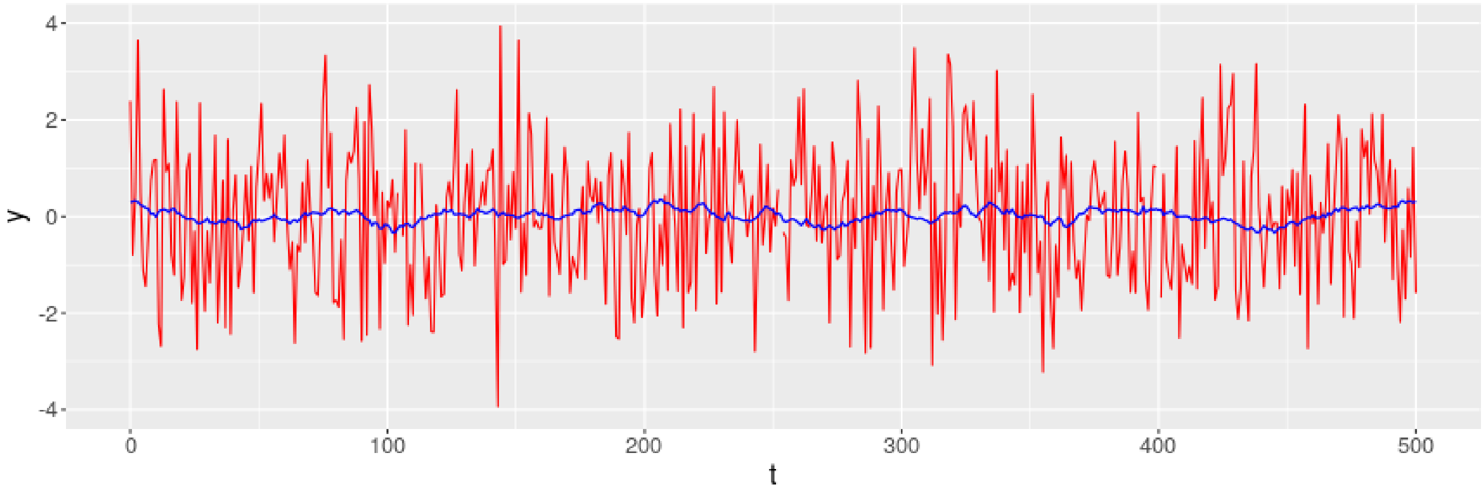


Serie filtrada Y(t)



Filtros Lineales: Ejemplo

Ambas series superpuestas:



El efecto del filtro con $\omega_0 = 0.1$ ha sido "alisar" mucho la serie al eliminar la variación a todas las frecuencias excepto las más bajas.

Densidad espectral de un proceso MA(q)

- Un proceso estacionario en tiempo discreto $\{X(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ es un **proceso de medias móviles de orden q** si:

$$X(t) = b_0 e(t) + b_1 e(t-1) + \ldots + b_q e(t-q)$$

siendo $\{e(t),\ t \in \mathbb{Z}\}$ un ruido blanco.

- De esta definición se sigue que un proceso MA(q) es un ruido blanco filtrado siendo $b_0, b_1, \ldots, b_q$ los coeficientes del filtro.

- Por tanto, la densidad espectral del proceso $X(t)$ será:

$$f_X(\omega) = f_e(\omega) \cdot |\Gamma(\omega)|^2, \;\; -\pi \le \omega \le \pi$$

Densidad espectral de un proceso MA(q)

Como:

- $f_e\left(\omega\right) = \frac{\sigma_e^2}{2\pi}\ ;\ \ -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$ (densidad espectral del ruido blanco)
- La función de transferencia en este caso es:

$$\Gamma\left(\omega\right) = \sum_u g_u \cdot e^{-i\omega u} = \sum_{u=0}^{q} b_u \cdot e^{-i\omega u}$$

se sigue que, si $X(t)$ es un proceso MA(q), su densidad espectral es:

$$f_X(\omega) = f_e(\omega) \cdot \left|\Gamma(\omega)\right|^2 = \frac{\sigma_e^2}{2\pi}\left|\sum_{u=0}^{q} b_u \cdot e^{-i\omega u}\right|^2,\ \ -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Ejemplo: densidad espectral de un proceso MA(4) con varianza 1