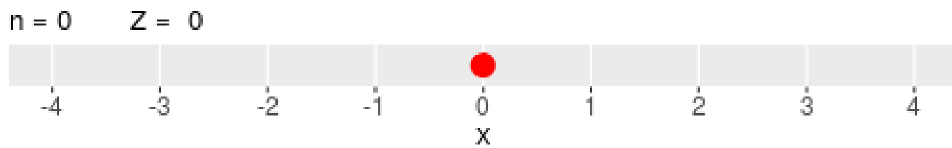
Estadística y Procesos Estocásticos
Tema 4. Cadenas de Markov

Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

1. Recorridos Aleatorios

Recorrido Aleatorio

- Considérese una partícula que se mueve a lo largo de un eje horizontal ocupando las posiciones correspondientes a los números enteros:



- Inicialmente la partícula se encuentra en la posición $X_0 = 0$.

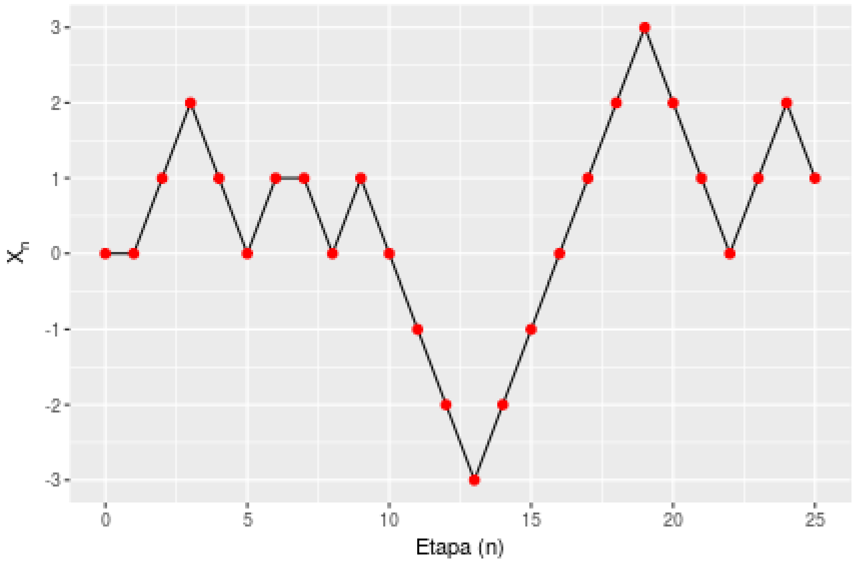
- En cada etapa $n \in N$, la partícula sufre un desplazamiento aleatorio Z_n , cuya distribución de probabilidad se especifica en la siguiente tabla:

Z_n	1	-1	0
$P[Z_n = t]$	p	q	1-p-q

- Las variables Z_n son independientes e igualmentes distribuidas

Recorrido Aleatorio

Podemos representar gráficamente el recorrido aleatorio como la posición de la partícula (X_n) frente a la etapa (n):



Recorrido Aleatorio

- La posición X_n de la partícula en la etapa n es:

$$X_n = X_{n-1} + Z_n$$

- A su vez, $X_{n-1} = X_{n-2} + Z_{n-1}$, por lo que:

$$X_n = X_{n-2} + Z_{n-1} + Z_n$$

- Repitiendo el proceso:

$$X_n = X_{n-3} + Z_{n-2} + Z_{n-1} + Z_n$$

$$X_n = X_{n-4} + Z_{n-3} + Z_{n-2} + Z_{n-1} + Z_n$$

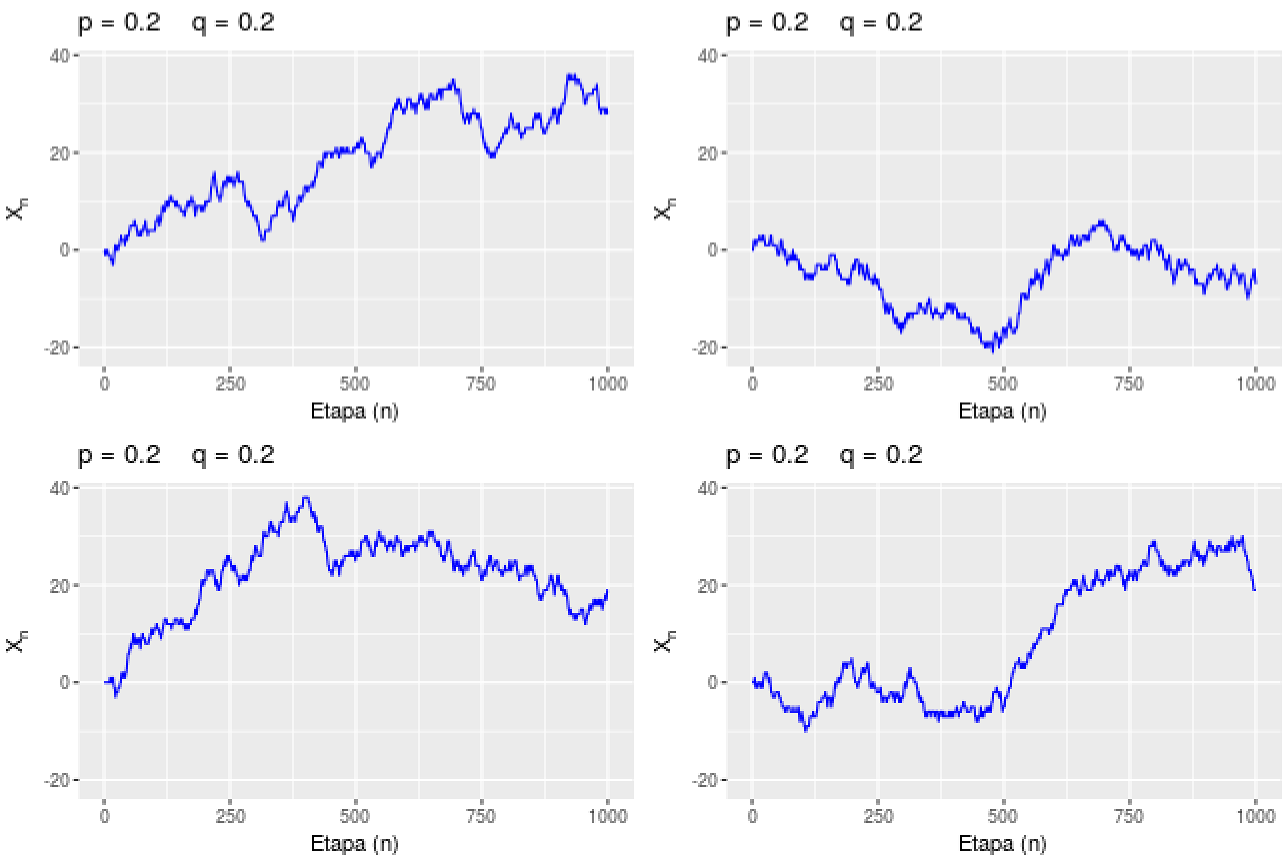
$$\vdots$$

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

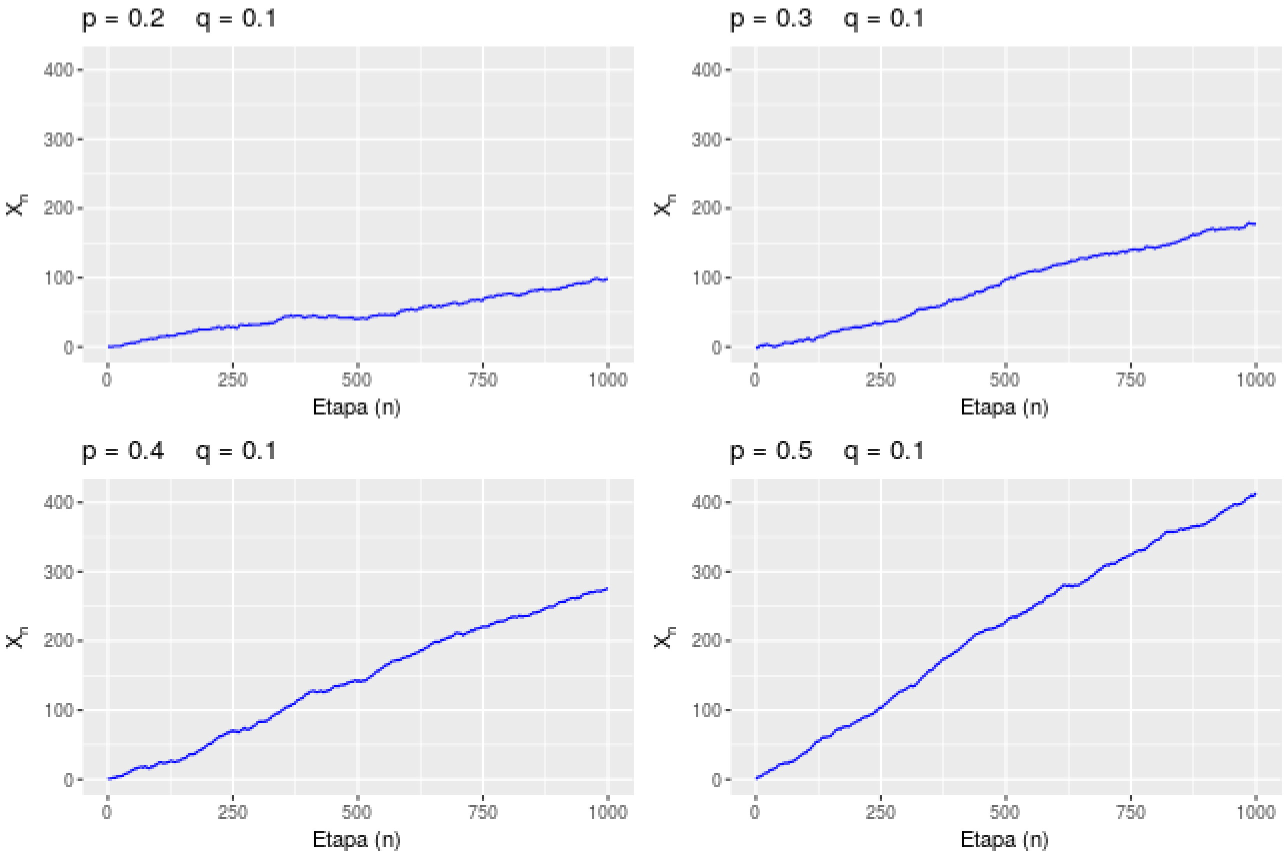
- Y como $X_0 = 0$:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

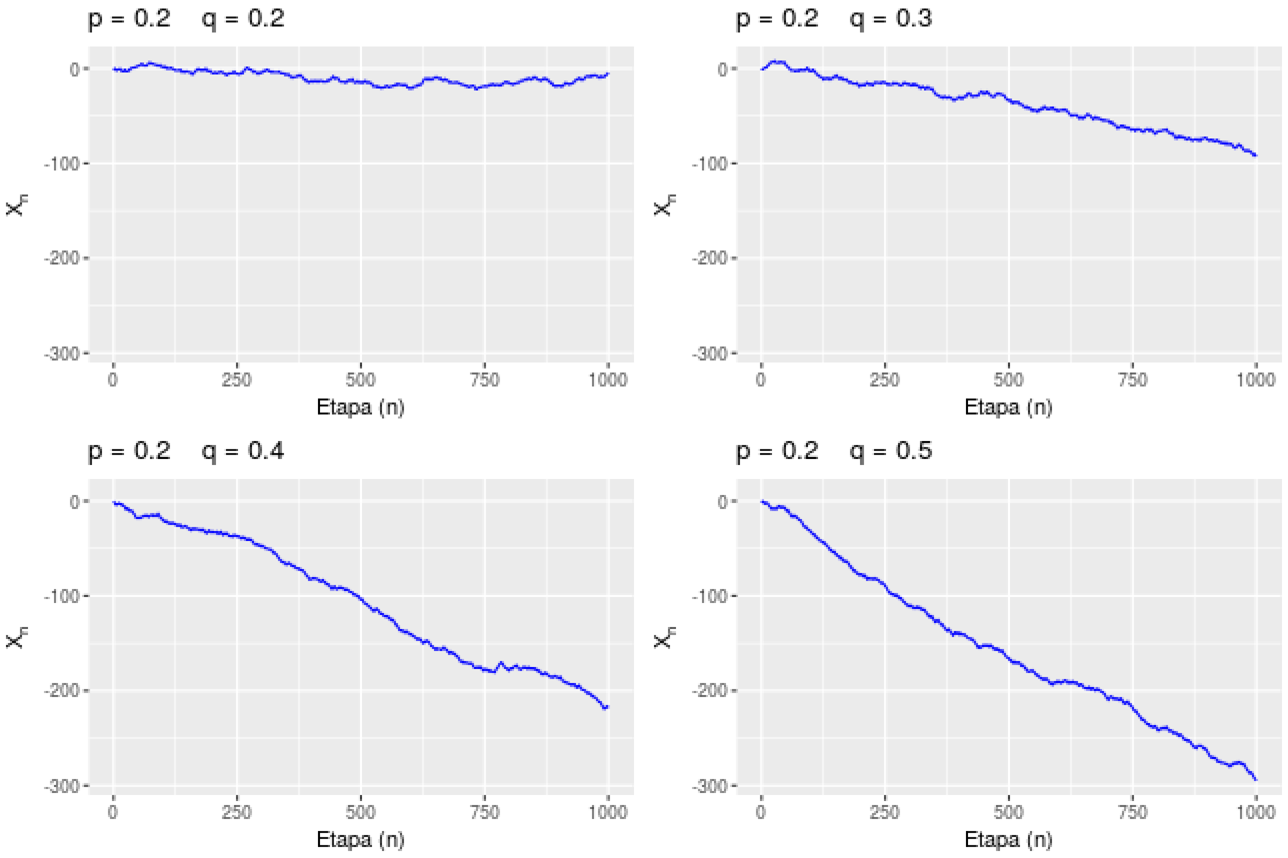
Algunos ejemplos de recorridos aleatorios



Algunos ejemplos de recorridos aleatorios



Algunos ejemplos de recorridos aleatorios



Esperanza de un recorrido aleatorio

Para calcular el valor esperado del recorrido aleatorio:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

comenzamos calculando la esperanza de Z_k:

$$Z_k = \begin{cases} -1 & q \\ 0 & 1-p-q \\ 1 & p \end{cases}$$

que se obtiene fácilmente como:

$$E\left[Z_k\right] = -1 \cdot q + 0 \cdot (1-p-q) + 1 \cdot p = p - q$$

De donde:

$$E\left[X_n\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[Z_k\right] = n\left(p-q\right)$$

Varianza de un recorrido aleatorio

Calcularemos ahora la varianza del recorrido aleatorio:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$$

Primero calculamos la varianza de Z_k:

$$E\left[Z_k^2\right] = (-1)^2 \cdot q + 0^2 \cdot (1 - p - q) + 1^2 \cdot p = p + q$$

$$Var\left[Z_k\right] = E\left[Z_k^2\right] - E[Z_k]^2 = p + q - (p - q)^2$$

Como las variables Z_k son independientes:

$$Var\left(X_n\right) = \sum_{k=1}^{n} Var\left(Z_k\right) = n\left(p + q - (p - q)^2\right)$$

Distribución límite de un recorrido aleatorio

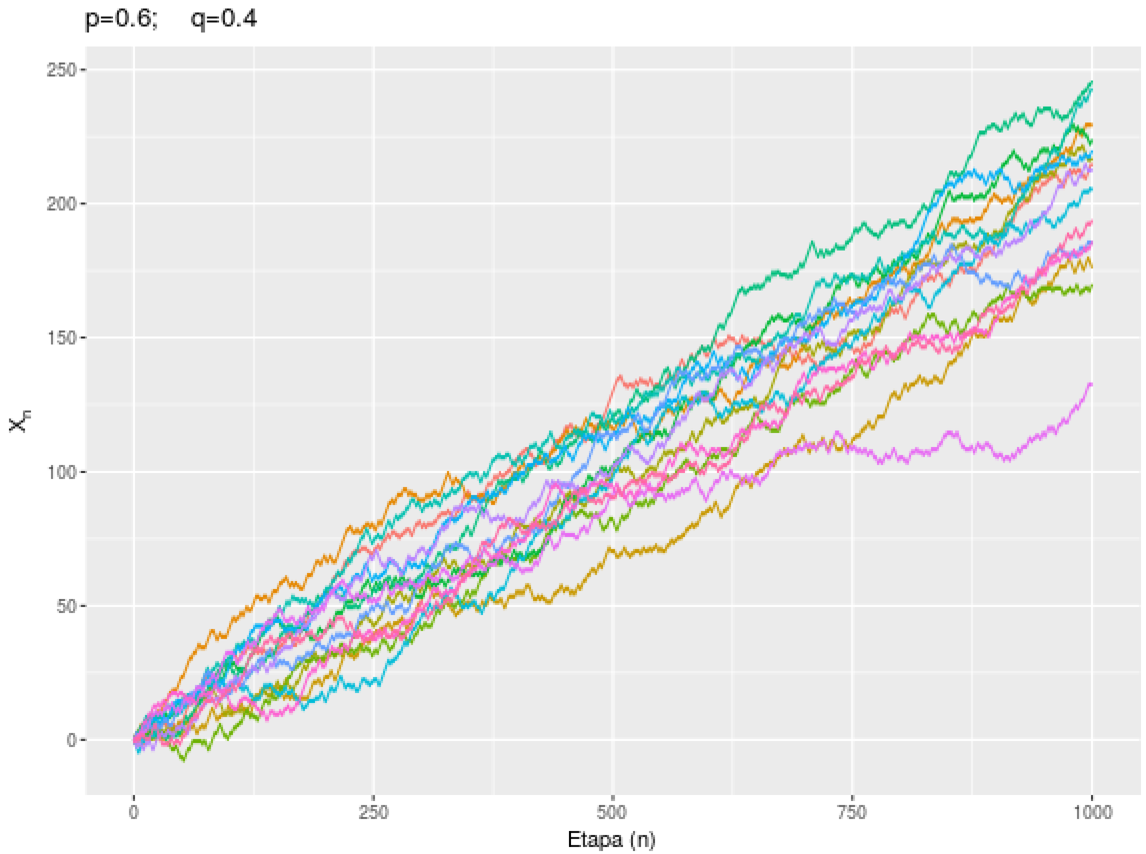
De acuerdo con el **teorema del límite central**, al ser $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $\mu_z = E[Z_k] = p - q$ y $\sigma_Z^2 = \mathrm{Var}(Z_k) = p + q - (p-q)^2$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, se tiene que:

$$\frac{\sum_{i=1}^n Z_i - n\mu_z}{\sigma_Z \sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - n(p-q)}{\sqrt{p+q-(p-q)^2}\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0,1\right)$$

Por tanto, cuando $n \to \infty$:

$$X_n = \sum_{i=1}^n Z_i \approx N\left(n\left(p-q\right), \sqrt{n\left(p+q-\left(p-q\right)^2\right)}\right)$$

Ejemplo:



$$E\left[X_{1000}\right] = 1000\,(0.6 - 0.4) = 200$$

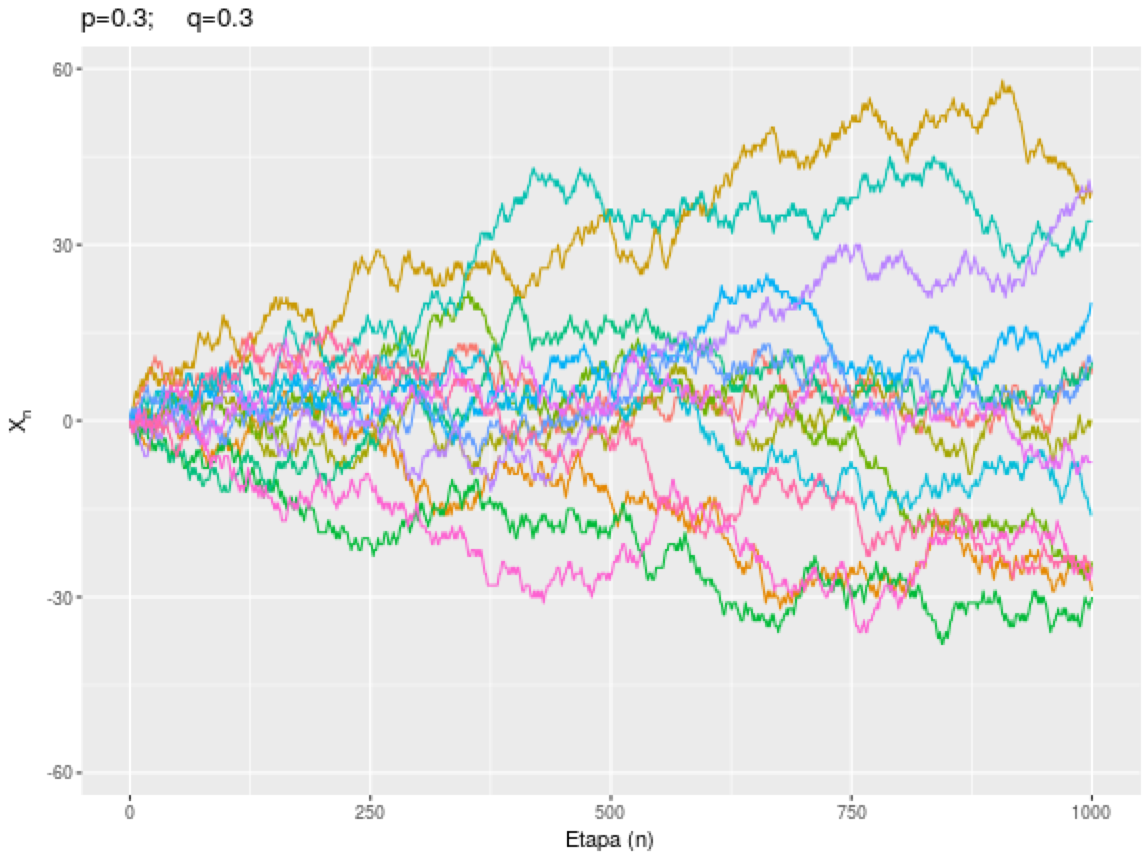
$$\sqrt{Var\left(X_{1000}\right)} = \sqrt{1000\left(0.6 + 0.4 - 0.2^{2}\right)} = 30.98$$

Ejemplo:

$$E\left[X_{1000}\right] = 1000\,(0.5 - 0.5) = 0$$

$$\sqrt{Var\left(X_{1000}\right)} = \sqrt{1000\,(0.5 + 0.5)} = 31.62$$

Ejemplo:



$$E\left[X_{1000}\right] = 1000\,(0.3 - 0.3) = 0$$

$$\sqrt{Var\left(X_{1000}\right)} = \sqrt{1000\,(0.3 + 0.3)} = 24.5$$

Ejercicio 1

Sea X_n un recorrido aleatorio con $p = q = 0.5$. Calcular:

a) $P\left(X_{1000} < 20\right)$

b) $P\left(-10 < X_{1000} < 20\right)$

c) El valor q_{95} tal que $P\left(X_{1000} \leq q_{95}\right) = 0.95$

De acuerdo con el teorema del límite central:

$$X_{1000} = \sum_{i=1}^{1000} Z_i \approx N\left(1000\left(0.5 - 0.5\right), \sqrt{1000\left(0.5 + 0.5 - \left(0.5 - 0.5\right)^2\right)}\right) = N(0, \sqrt{1000})$$

Ejercicio 1

Como $X_{1000} \approx N(0, \sqrt{1000})$ entonces $\frac{X}{\sqrt{1000}} \approx N(0,1)$

Por tanto (llamando Z la variable normal tipificada $N(0,1)$):

a) $P\left(X_{1000} < 20\right) = P\left(\frac{X_{1000}}{\sqrt{1000}} < \frac{20}{\sqrt{1000}}\right) = P\left(Z < 0.6325\right) \approx 0.7365$

b) $P\left(-10 < X_{1000} < 20\right) = P\left(X_{1000} < 20\right) - P\left(X_{1000} < -10\right) =$
$= P\left(Z < \frac{20}{\sqrt{1000}}\right) - P\left(Z < \frac{-10}{\sqrt{1000}}\right) =$
$= P\left(Z < 0.6325\right) - P\left(Z < -0.3162\right) \approx 0.7365 - 0.3759 = 0.3606$

c) En la tabla de la $N(0,1)$ se obtiene que $P\left(Z < 1.645\right) = 0.95$. Por tanto:

$$P\left(\frac{X}{\sqrt{1000}} < 1.945\right) = 0.95 \Rightarrow P\left(X < 1.945 \cdot \sqrt{1000}\right) = 0.95 \Rightarrow q_{95} = 1.945 \cdot \sqrt{1000} = 61.51$$

Ejercicio 2

Consideremos un recorrido aleatorio con parámetros $p = 0.4$ y $q = 0.3$ y supongamos que inicialmente la partícula no está en la posición $X_0 = 0$, pero se sabe que $P(X_0 = 1) = 0.2$, $P(X_0 = 2) = 0.3$, $P(X_0 = 3) = 0.1$ y $P(X_0 = 4) = 0.4$. Calcular $P(X_1 = 2)$

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P\left(X_1 = 2\right) = P\left(\left. X_1 = 2 \right| X_0 = 1\right) P\left(X_0 = 1\right) + P\left(\left. X_1 = 2 \right| X_0 = 2\right) P\left(X_0 = 2\right) +$$

$$+ P\left(\left. X_1 = 2 \right| X_0 = 3\right) P\left(X_0 = 3\right) + P\left(\left. X_1 = 2 \right| X_0 = 4\right) P\left(X_0 = 4\right) =$$

$$= p \cdot P\left(X_0 = 1\right) + (1 - p - q) \cdot P\left(X_0 = 2\right) + q \cdot P\left(X_0 = 3\right) + 0 \cdot P\left(X_0 = 4\right) =$$

$$= 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.4 = 0.2$$

Ejercicio 3

Sea X_n un recorrido aleatorio con parámetros p y q.

Calcular la siguientes probabilidades:

a) $P\left(X_{63}=2 \mid X_{62}=1\right)$

b) $P\left(X_{63}=j \mid X_{62}=i\right)$

c) $P\left(X_{655}=j \mid X_{654}=i\right)$

d) $P\left(X_1=1, X_2=2\right)$

e) $P\left(X_1=1, X_2=2, X_3=1\right)$

f) $P\left(X_1=1, X_2=2, X_3=3, X_4=3, X_5=2, X_6=1, X_7=0\right)$

Ejercicio 3

a) $P\left(X_{63}=2 \mid X_{62}=1\right)=$

$P(Z_{63}=1)=p$

b) $P\left(X_{63}=j \mid X_{62}=i\right)$

$$\operatorname{Pr}\left(X_{63}=j \mid X_{62}=i\right)=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \\ 1-p-q & j=i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

c) $P\left(X_{655}=j \mid X_{654}=i\right)$

La probabilidad es la misma que en el caso anterior ya que la distribución de los saltos no depende de n:

$$\operatorname{Pr}\left(X_{655}=j \mid X_{654}=i\right)=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \\ 1-p-q & j=i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 3

d) $P\left(X_1 = 1, X_2 = 2\right) =$

$$= P\left(X_1 = 1\right) \cdot P\left(X_2 = 2 | X_1 = 1\right) = P\left(Z_1 = 1\right) P\left(Z_2 = 1\right) = p \cdot p = p^2$$

e) $P\left(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1\right) =$

$$= P\left(X_1 = 1\right) \cdot P\left(X_2 = 2 | X_1 = 1\right) \cdot P\left(X_3 = 1 | X_1 = 1, X_2 = 2\right) =$$

$$= P\left(Z_1 = 1\right) P\left(Z_2 = 1\right) P\left(Z_3 = -1\right) = p \cdot p \cdot q = p^2 \cdot q$$

f) $P\left(X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 3, X_4 = 3, X_5 = 2, X_6 = 1, X_7 = 0\right) =$

$$= P\left(Z_1 = 1\right) P\left(Z_2 = 1\right) P\left(Z_3 = 1\right) P\left(Z_4 = 0\right) P\left(Z_5 = -1\right) P\left(Z_6 = -1\right) P\left(Z_7 = -1\right) =$$

$$= p \cdot p \cdot p \cdot (1 - p - q) \cdot q \cdot q \cdot q$$

Condición de Markov

Tal como se construye el recorrido aleatorio, **si se conoce la posición de la partícula en la etapa *n*** , las posiciones que la partícula haya ocupado en etapas anteriores **no aportan más información** para predecir la posición que ocupará en la etapa *n+1*:

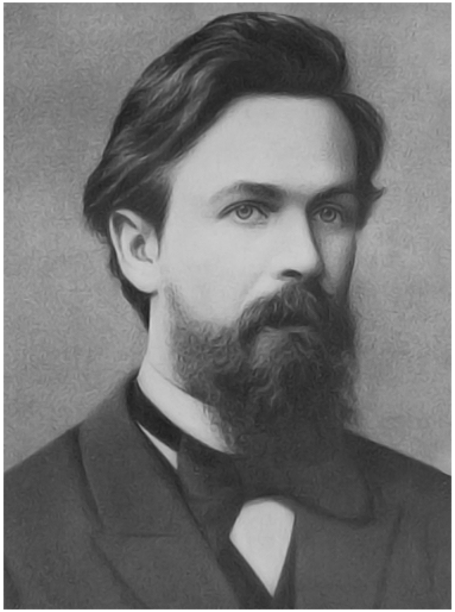
$$\Pr\left(X_{n+1}=j\,|X_0=i_0,\,X_1=i_1,\,\ldots,\,X_{n-1}=i_{n-1},\,X_n=i\,\right)=\Pr\left(X_{n+1}=j\,|X_n=i\,\right)$$

Así pues, **en un recorrido aleatorio, el pasado** $(X_0,\,X_1,\,\ldots,\,X_{n-1})$ **no aporta información para la predicción del futuro** (X_{n+1}) **una vez que se conoce el presente** (X_n).

Más concretamente $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\Pr\left(X_{n+1}=j\mid X_n=i\right)=\begin{cases}p & j=i+1\\ q & j=i-1\\ 1-p-q & j=i\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Condición de Markov



Andrei Markov (1856-1922)

En general, una sucesión de variables aleatorias de la forma $\{X_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ definidas sobre un mismo espacio de probabilidad (Ω, S, P) y con valores en un conjunto E finito o numerable $\{X_n : \Omega \to E\}$ verifica la **condición de Markov** si una vez que se conoce su valor actual, los valores pasados no contienen información adicional para predecir sus valores futuros, esto es,

$\forall n \in N;\ i_0,\ i_1,\ \cdots,\ i,\ j \in E$:

$$\Pr\left(X_{n+1} = j \,|\, X_0 = i_0,\ X_1 = i_1,\ \ldots,\ X_{n-1} = i_{n-1},\ X_n = i\right) =$$

$$= \Pr\left(X_{n+1} = j \,|\, X_n = i\right)$$

Las sucesiones de variables aleatorias $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ que cumplen la condición de Markov se denominan **cadenas de Markov**.